УДК 517.521

# *К ТЕОРИИ БЕСКОНЕЧНЫХ ЧИСЛОВЫХ ТРОЙНЫХ РЯДОВ*

**И.В. ТЕРЕЩЕНКО**

*Кубанский государственный технологический университет,*
*350072, Российская Федерация, г. Краснодар, ул. Московская, 2;*
*электронная почта: tereshchenko57@rambler.ru*

Изложена общая теория бесконечных тройных рядов, которая почти не отражена в математической литературе. Изложение строится по аналогии с теорией бесконечных двойных рядов. Найден и доказан необходимый признак сходимости. Приведено свойство линейности тройных рядов. Указан критерий Коши сходимости тройного ряда. Показано, что сходимость тройного ряда не обязательно означает, что его члены ограничены. Рассмотрены и изучены повторные ряды. Доказано три аналога теоремы Прингсхейма о равенстве повторных рядов. Впервые рассмотрен и доказан один из возможных аналогов теоремы Маркова о равенстве повторных рядов в случае тройного ряда.

Ключевые слова: бесконечный двойной ряд, бесконечный тройной ряд, признак сходимости, признак сгущения, теорема Прингсхейма, критерий Коши, теорема Маркова.

1. Введение. Современная теория бесконечных числовых тройных рядов почти не отражена в математической литературе и строится по аналогии с теорией бесконечных двойных рядов. Изложим здесь необходимые основные понятия и определения этой теории (теорию двойных интегралов смотри в [1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8]).

Пусть дана тройная вещественная или комплексная последовательность

$$\left\{a_{nml}\right\}_{n=1 m=1 l=1}^{\infty \ \infty \ \infty}, \tag{1}$$

которая представляет собой бесконечную кубическую матрицу с тремя входами. Элементы этой матрицы называются членами бесконечного тройного ряда. Так же, как и в случае бесконечных тройных рядов, не существует однозначного способа определения частичной суммы тройного ряда. Например, мы можем составить частичные суммы по кубам

$$S_n = \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{n} \sum_{k=1}^{n} a_{ijk} \tag{2}$$

или по треугольникам

$$S_1 = a_{111},\ S_2 = a_{111} + (a_{112} + a_{121} + a_{211}), \ldots, S_n = a_{111} + \sum_{m=3}^{n+3} \sum_{i+j+k=m}^{m} a_{ijk}, \ldots.$$

В дальнейшем мы будем рассматривать частичные суммы по Прингсхейму (иначе по прямоугольным параллелепипедам). Дадим необходимые определения.

Частичной суммой тройного ряда по Прингсхейму (или по прямоугольным параллелепипедам) называется конечная тройная сумма членов последовательности (1)

$$S_{nmp} = \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{m} \sum_{k=1}^{p} a_{ijk}\ . \tag{3}$$

Множество всех частичных сумм $S_{nmp}$ само образует тройную числовую последовательность $\left\{S_{nmp}\right\}_{n=1 m=1 p=1}^{\infty\ \infty\ \infty}$, которую будем называть бесконечным числовым тройным рядом и обозначать символом

$$\sum_{i=1}^{\infty} \sum_{j=1}^{\infty} \sum_{k=1}^{\infty} a_{ijk} \tag{4}$$

Суммой числового бесконечного тройного ряда (4) по Прингсхейму называется вещественное число S равное конечному пределу частичных сумм (3) при стремлении n, m и p независимо друг от друга к бесконечности

$$\lim_{\substack{n\to\infty \\ m\to\infty \\ p\to\infty}} S_{nmp} = S\,.$$

Более точно это означает, что для любого сколь угодно малого вещественного числа $\varepsilon > 0$ найдутся три натуральных числа $N_\varepsilon$, $M_\varepsilon$ и $P_\varepsilon$, в общем случае зависящих от числа $\varepsilon$, таких, что неравенство $\left|S_{nm} - S\right| < \varepsilon$ выполняется для всех натуральных чисел $n > N_\varepsilon$, $m > M_\varepsilon$ и $p > P_\varepsilon$. Сумму сходящегося тройного ряда (4) обозначают тем же символом, что и сам тройного ряд (4)

$$S=\sum_{n=1}^{\infty}\sum_{m=1}^{\infty}\sum_{p=1}^{\infty}a_{nmp}.$$

**Замечание 1.** В определении суммы ряда по Прингсхейму можно положить $N_{\varepsilon}=M_{\varepsilon}=P_{\varepsilon}$.

**Замечание 2.** Можно дать другие определения тройного числового ряда, равносильные нашему определению. Например, числовой тройной ряд можно определить как пару двух тройных последовательностей $\left(\left\{a_{nmp}\right\},\left\{S_{nmp}\right\}\right)$, где $\left\{a_{nmp}\right\}_{n=1m=1p=1}^{\infty\ \infty\ \infty}$ - последовательность членов тройного ряда и $\left\{S_{nmp}\right\}_{n=1m=1p=1}^{\infty\ \infty\ \infty}$ - последовательность частичных сумм.

Бесконечный числовой тройной ряд (4) называется с х о д я щ и м с я, если он имеет конечную сумму *S*. В противном случае ряд называется р а с х о д я щ и м с я. Ряд называется п о л о ж и т е л ь н ы м, если все его члены неотрицательны $a_{ijk}\geq 0$. Ряд называется строго п о л о ж и т е л ь н ы м, если все его члены положительны $a_{ijk}>0$.

Если воспользоваться другим набором частичных сумм, например, по треугольникам или по кругам, и определить сумму ряда как предел частичных сумм, то она может не совпадать с суммой ряда по Прингсхейму или ряд может расходиться.

**2. Основные свойства сходящихся тройных рядов.** Из определения сходящегося тройного ряда следуют все свойства этих рядов, которые во многом совпадают со свойствами обычных сходящихся бесконечных рядов [2, 3, 4, 5, 6, 7]. Например, для произвольного тройного ряда (4) справедлив необходимый признак сходимости и критерий сходимости Коши.

**Необходимый признак сходимости.** *Если тройной ряд* (4) *сходится*, *то общий член такого ряда сходится к нулю*

$$\lim_{\substack{n\to\infty\\ m\to\infty\\ k\to\infty}}a_{nmk}=0.$$

Справедливость этого признака следует из «очевидного» равенства

$$a_{nmp} = S_{nmp} - S_{nm-1p} - S_{n-1mp} + S_{n-1m-1p} - S_{nmp-1} + S_{nm-1p-1} + S_{n-1mp-1} - S_{n-1m-1p-1}, \quad (5)$$

переходя в котором к пределу, получаем требуемый результата. Следует добавить, что в этой формуле применяется следующее соглашение: как только индекс какого-нибудь члена в правой части формулы равен нулю, так сам член формулы принимается за ноль. Например, $a_{111} = S_{111}$, $a_{211} = S_{211} - S_{111}$, $a_{121} = S_{121} - S_{111}$, $a_{112} = S_{112} - S_{111}$, $a_{212} = S_{212} - S_{112} - S_{211} + S_{111}$, $a_{221} = S_{221} - S_{211} - S_{121} + S_{111}$, $a_{122} = S_{122} - S_{112} - S_{121} - S_{111}$.

Необходимый признак сходимости можно легко обратить и получить достаточный признак расходимости.

**Достаточной признак расходимости.** *Если*

$$\lim_{\substack{n\to\infty \\ m\to\infty \\ k\to\infty}} a_{nmk} \neq 0,$$

*то тройной ряд* (4) *расходится*.

Укажем ещё на один полезный признак сходимости. Если три обыкновенных ряда

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n = A, \quad \sum_{m=1}^{\infty} b_m = B, \quad \sum_{k=1}^{\infty} c_k = C$$

сходятся, то тройной ряд (4) с общим членом $a_n b_m c_k$ сходится к сумме

$$\sum_{n=1}^{\infty}\sum_{m=1}^{\infty}\sum_{k=1}^{\infty} a_n b_m c_k == ABC.$$

Доказательство. Согласно определению

$$\lim_{\substack{n\to\infty \\ m\to\infty \\ p\to\infty}} \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{m}\sum_{k=1}^{p} a_i b_j c_k = \left(\lim_{n\to\infty}\sum_{i=1}^{n} a_i\right)\left(\lim_{m\to\infty}\sum_{j=1}^{m} b_j\right)\left(\lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{p} c_k\right) = ABC.$$

**Критерий сходимости Коши.** *Для сходимости тройного ряда* (4) *необходимо и достаточно, чтобы для любого положительного числа* $\varepsilon$ *существовало натуральное число* $N_\varepsilon$, *возможно зависящее от* $\varepsilon$, *такое что неравенство*

$$\left|S_{pqr} - S_{nmk}\right| < \varepsilon \tag{6}$$

*выполняется для любых двух троек натуральных чисел* $p, q, r$ *и* $n, m, k$, *числа в которых превосходят* $N_\varepsilon$.

Доказательство. Необходимость. Пусть ряд (4) сходится своей сумме $S$. Тогда для любого положительного числа $\varepsilon$ выберем натуральное число $N_\varepsilon$ такое, что для всех натуральных чисел $p, q, r$ и $n, m, k$, больших $N_\varepsilon$, справедливы неравенства

$$\left|S_{nmk} - S\right| < \frac{\varepsilon}{2} \text{ и } \left|S_{pqr} - S\right| < \frac{\varepsilon}{2}.$$

Отсюда получаем неравенство (6)

$$\left|S_{pqr} - S_{nmk}\right| = \left|\left(S_{pqr} - S\right) - \left(S_{nmk} - S\right)\right| \le \left|S_{pqr} - S\right| + \left|S_{nmk} - S\right| < \varepsilon.$$

Достаточность. Пусть для ряда (4) критерий Коши (6) выполнен. Тогда он выполнен для последовательности частичных сумм по кубам $\left\{S_{nnn}\right\}$. Следовательно, она сходится и пусть $\lim\limits_{n\to\infty} S_{nnn} = S$. Тогда для произвольного числа $\varepsilon > 0$ выберем число $N_\varepsilon$ так, чтобы для всех чисел $n$, $m$, и $k$ больших $N_\varepsilon$, выполнялись бы неравенства

$$\left|S_{nmk} - S_{nnn}\right| < \frac{\varepsilon}{2} \text{ и } \left|S_{nnn} - S\right| < \frac{\varepsilon}{2}.$$

Тогда для произвольного числа $\varepsilon > 0$ неравенство

$$\left|S_{nmk} - S\right| = \left|\left(S_{nmk} - S_{nnn}\right) + \left(S_{nnn} - S\right)\right| \le \left|S_{nmk} - S_{nnn}\right| + \left|S_{nnn} - S\right| < \varepsilon$$

справедливо для всех чисел *n*, *m*, и *k* больших $N_\varepsilon$. Другими словами, ряд (4) сходится к своей сумме *S*.

Сходящиеся тройные ряды подчиняются линейному свойству, которое является простым следствием свойства линейности предела тройной последовательности.

**Линейное свойство сходящихся тройных рядов.** *Если два тройных ряда* $\sum_{n=1}^{\infty}\sum_{m=1}^{\infty}\sum_{p=1}^{\infty}a_{nmp}$ *и* $\sum_{n=1}^{\infty}\sum_{m=1}^{\infty}\sum_{p=1}^{\infty}b_{nmp}$ *сходятся, то для любых двух вещественных чисел* $\lambda$ *и* $\mu$ *ряд* $\sum_{n=1}^{\infty}\sum_{m=1}^{\infty}\sum_{k=1}^{\infty}\left(\lambda a_{nmk}+\mu b_{nmk}\right)$ *сходится, причём для сумм этих рядов справедливо равенство*

$$\sum_{n=1}^{\infty}\sum_{m=1}^{\infty}\sum_{k=1}^{\infty}\left(\lambda a_{nmk}+\mu b_{nmk}\right)=\lambda\sum_{n=1}^{\infty}\sum_{m=1}^{\infty}\sum_{k=1}^{\infty}a_{nmk}+\mu\sum_{n=1}^{\infty}\sum_{m=1}^{\infty}\sum_{k=1}^{\infty}b_{nmk}\,.$$

Если тройной ряд сходится, то он может быть неограниченным. Приведём пример такого ряда. Пусть $a_{n11}=n,\ a_{n21}=-n$ и для всех остальных значений индексов $a_{nmk}=0$. Тогда частичные суммы тройного ряда $S_{nmk}$ для всех $n\geq 2$ равны 0. По этой причине ряд $\sum_{n=1}^{\infty}\sum_{m=1}^{\infty}\sum_{k=1}^{\infty}a_{nmk}$ сходится и его сумма равна 0. Однако, члены ряда этого ряда не ограничены.

**3. Повторные ряды и их сходимость.** Используя тройной ряд (4) можно составить следующие ряды, называемые повторными рядами для тройного ряда

$$\sum_{n=1}^{\infty}\left(\sum_{m=1}^{\infty}\sum_{k=1}^{\infty}a_{nmk}\right),\ \sum_{m=1}^{\infty}\left(\sum_{n=1}^{\infty}\sum_{k=1}^{\infty}a_{nmk}\right)\text{ и }\sum_{k=1}^{\infty}\left(\sum_{n=1}^{\infty}\sum_{m=1}^{\infty}a_{nmk}\right).\qquad(7)$$

Повторный ряд $\sum_{n=1}^{\infty}\left(\sum_{m=1}^{\infty}\sum_{k=1}^{\infty}a_{nmk}\right)$ называется сходящимся, если двойной ряд $\sum_{m=1}^{\infty}\sum_{k=1}^{\infty}a_{nmk}$ сходится для каждого натурального $k$ к сумме $S_k$, причём ряд из этих сумм $\sum_{k=1}^{\infty}S_k$ сам сходится. Аналогично определяется сходимость двух других повторных рядов (7) для тройного ряда (1). Для повторных рядов справедлив аналог теоремы Прингсхейма о повторных рядах для двойного ряда [4, с. 61].

**Теорема 1. (Аналог теоремы Прингсхейма о повторном ряде для двойного ряда).** *Если ряд* (1) *сходится к сумме S и сходится двойной ряд одного из повторных рядов* (7) для каждого значения свободного третьего индекса, *то соответствующий повторный ряд сходится к сумме S, то есть имеет место одно из трёх равенств*

$$\sum_{n=1}^{\infty}\sum_{m=1}^{\infty}\sum_{k=1}^{\infty}a_{nmk}=\sum_{n=1}^{\infty}\left(\sum_{m=1}^{\infty}\sum_{k=1}^{\infty}a_{nmk}\right),\quad \sum_{n=1}^{\infty}\sum_{m=1}^{\infty}\sum_{k=1}^{\infty}a_{nmk}=\sum_{n=1}^{\infty}\left(\sum_{m=1}^{\infty}\sum_{k=1}^{\infty}a_{nmk}\right),\text{ или}$$

$$\sum_{n=1}^{\infty}\sum_{m=1}^{\infty}\sum_{k=1}^{\infty}a_{nmk}=\sum_{n=1}^{\infty}\left(\sum_{m=1}^{\infty}\sum_{k=1}^{\infty}a_{nmk}\right). \tag{8}$$

Доказательство. Пусть тройной ряд (1) сходится к сумме *S*. Тогда для каждого вещественного $\varepsilon>0$ существует такое натуральное число $N_\varepsilon$, что для всех $n,m,k>N_\varepsilon$ справедливо неравенство

$$S-\varepsilon<\sum_{p=1}^{n}\sum_{q=1}^{m}\sum_{r=1}^{k}a_{pqr}<S+\varepsilon. \tag{9}$$

Переходя в этом двойном неравенстве к двойному пределу по переменным *m* и *k*, получим, учитывая сходимость двойного ряда, что

$$S-\varepsilon \le \sum_{p=1}^{n} \lim_{\substack{m\to\infty \\ k\to\infty}} \left( \sum_{q=1}^{m} \sum_{r=1}^{k} a_{pqr} \right) \le S+\varepsilon$$

или

$$S-\varepsilon \le \sum_{p=1}^{n} S_p \le S+\varepsilon .$$

Последнее двойное неравенство означает, что $\sum_{p=1}^{\infty} S_p = S$ и что повторный ряд $\sum_{n=1}^{\infty} \left( \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{k=1}^{\infty} a_{nmk} \right)$ сходится к сумме *S*. Аналогично доказывается сходимость двух других повторных рядов. Теорема доказана.

**Следствие из теоремы 1.** Если тройной ряд (1) сходится и сходится каждый из трёх обыкновенных рядов $\sum_{k=1}^{\infty} a_{nmk}$, $\sum_{m=1}^{\infty} a_{nmk}$ и $\sum_{n=1}^{\infty} a_{nmk}$, то суммы всех трёх повторных рядов (8) равны сумме тройного ряда (1)

$$\sum_{n=1}^{\infty} \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{k=1}^{\infty} a_{nmk} = \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{m=1}^{\infty} \left( \sum_{k=1}^{\infty} a_{nmk} \right) = \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{k=1}^{\infty} \left( \sum_{m=1}^{\infty} a_{nmk} \right) = \sum_{k=1}^{\infty} \sum_{m=1}^{\infty} \left( \sum_{n=1}^{\infty} a_{nmk} \right).$$

**Замечание 1.** В [3, сс. 237 - 238] в теореме на странице 237 (которая и есть теорема Прингсхейма для двойных рядов) напрасно добавлено дополнительное требование сходимости самих повторных рядов.

**Замечание 2.** Из сходимости всех трёх повторных рядов (8) и равенства их сумм не следует даже сходимость тройного ряда (1). Например, если

$$a_{111} = \frac{1\cdot 1\cdot 1}{(1+1+1)^3}, \qquad a_{211} = \frac{2\cdot 1\cdot 1}{(2+1+1)^3} - \frac{1\cdot 1\cdot 1}{(1+1+1)^3}, \qquad a_{121} = \frac{1\cdot 2\cdot 1}{(1+2+1)^3} - \frac{1\cdot 1\cdot 1}{(1+1+1)^3},$$

$$a_{112} = \frac{1\cdot 1\cdot 2}{(1+1+2)^3} - \frac{1\cdot 1\cdot 1}{(1+1+1)^3},$$

$$a_{221}=\frac{2\cdot 2\cdot 1}{(2+2+1)^3}-\frac{2\cdot 1\cdot 1}{(2+1+1)^3}-\frac{2\cdot 1\cdot 1}{(2+1+1)^3}+\frac{1\cdot 1\cdot 1}{(1+1+1)^3},$$

$$a_{212}=\frac{2\cdot 1\cdot 2}{(2+1+2)^3}-\frac{1\cdot 1\cdot 2}{(1+1+2)^3}-\frac{2\cdot 1\cdot 1}{(2+1+1)^3}+\frac{1\cdot 1\cdot 1}{(1+1+1)^3},$$

$$a_{122}=\frac{1\cdot 2\cdot 2}{(1+2+2)^3}-\frac{1\cdot 1\cdot 2}{(1+1+2)^3}-\frac{1\cdot 2\cdot 2}{(1+2+2)^3}+\frac{1\cdot 1\cdot 1}{(1+1+1)^3}$$

$$a_{nmk}=\frac{nmk}{(n+m+k)^3}-\frac{n(m-1)k}{(n+m-1+k)^3}-\frac{(n-1)mk}{(n-1+m+k)^3}+\frac{(n-1)(m-1)k}{(n+m+k-2)^3}-$$

$$-\frac{nm(k-1)}{(n+m+k-1)^3}+\frac{n(m-1)(k-1)}{(n+m+k-2)^3}+\frac{(n-1)m(k-1)}{(n+m+k-2)^3}-\frac{(n-1)(m-1)(k-1)}{(n+m+k-3)^3},$$

то $S_{nmk}=\dfrac{nmk}{(n+m+k)^3}$. Так как $\sum_{k=1}^{\infty}a_{nmk}=\lim_{k\to\infty}\dfrac{nmk}{(n+m+k)^3}=0$, $\sum_{m=1}^{\infty}a_{nmk}=\lim_{m\to\infty}\dfrac{nmk}{(n+m+k)^3}=0$, $\sum_{n=1}^{\infty}a_{nmk}=\lim_{n\to\infty}\dfrac{nmk}{(n+m+k)^3}=0$, то $\sum_{n=1}^{\infty}\sum_{m=1}^{\infty}\left(\sum_{k=1}^{\infty}a_{nmk}\right)=\sum_{n=1}^{\infty}\sum_{k=1}^{\infty}\left(\sum_{m=1}^{\infty}a_{nmk}\right)=\sum_{k=1}^{\infty}\sum_{m=1}^{\infty}\left(\sum_{n=1}^{\infty}a_{nmk}\right)=0$. Однако $S_{nnn}=\dfrac{1}{27}$ и $S_{nn(2n)}=\dfrac{1}{32}$, поэтому тройной ряд $\sum_{n=1}^{\infty}\sum_{m=1}^{\infty}\sum_{k=1}^{\infty}a_{nmk}$ расходится.

Можно рассмотреть ещё три ряда, называемых повторными рядами для тройного ряда (1)

$$\sum_{n=1}^{\infty}\sum_{m=1}^{\infty}\left(\sum_{k=1}^{\infty}a_{nmk}\right),\ \sum_{n=1}^{\infty}\sum_{k=1}^{\infty}\left(\sum_{m=1}^{\infty}a_{nmk}\right)\ \text{и}\ \sum_{k=1}^{\infty}\sum_{m=1}^{\infty}\left(\sum_{n=1}^{\infty}a_{nmk}\right). \tag{10}$$

Сходимость этих повторных рядов определяется аналогично сходимости повторных рядов (7). Например, первый из этих повторных рядов называется сходящимся, если сходится ряд $\sum_{k=1}^{\infty}a_{nmk}$ для каждой пары индексов $n$, $m$ к сумме

$S_{nm}$, и сходится двойной ряд $\sum_{n=1}^{\infty}\sum_{m=1}^{\infty} S_{nm}$ к своей сумме *S*. В таком случае число *S* называют суммой повторного ряда и пишут $\sum_{n=1}^{\infty}\sum_{m=1}^{\infty}\left(\sum_{k=1}^{\infty} a_{nmk}\right) = S$.

Нетрудно получить теперь для повторных рядов (10) аналог теоремы Прингсхейма о повторных рядах для двойного ряда [4, с. 61].

**Теорема 2. (Аналог теоремы Прингсхейма о повторном ряде для двойного ряда).** *Если ряд* (1) *сходится к сумме S и сходится обыкновенный ряд одного из повторных рядов* (9) *для каждой пары значений двух свободных индексов, то соответствующий повторный ряд* (9) *сходится к сумме S, то есть имеет место одно из трёх равенств*

$$\sum_{n=1}^{\infty}\sum_{m=1}^{\infty}\sum_{k=1}^{\infty} a_{nmk} = \sum_{n=1}^{\infty}\sum_{m=1}^{\infty}\left(\sum_{k=1}^{\infty} a_{nmk}\right), \quad \sum_{n=1}^{\infty}\sum_{m=1}^{\infty}\sum_{k=1}^{\infty} a_{nmk} = \sum_{n=1}^{\infty}\sum_{k=1}^{\infty}\left(\sum_{m=1}^{\infty} a_{nmk}\right), \text{ или}$$

$$\sum_{n=1}^{\infty}\sum_{m=1}^{\infty}\sum_{k=1}^{\infty} a_{nmk} = \sum_{k=1}^{\infty}\sum_{m=1}^{\infty}\left(\sum_{n=1}^{\infty} a_{nmk}\right). \tag{11}$$

Доказательство. Пусть тройной ряд (1) сходится к сумме *S*. Тогда для каждого вещественного $\varepsilon > 0$ существует такое натуральное число $N_\varepsilon$, что для всех $n, m, k > N_\varepsilon$ справедливо неравенство (9). Переходя в этом двойном неравенстве к пределу по переменной *k*, получим, учитывая сходимость обыкновенного ряда, что

$$S - \varepsilon \le \sum_{p=1}^{n}\sum_{q=1}^{m}\lim_{k\to\infty}\sum_{r=1}^{k} a_{pqr} \le S + \varepsilon$$

или

$$S - \varepsilon \le \sum_{p=1}^{n}\sum_{q=1}^{m} S_{pq} \le S + \varepsilon .$$

Последнее двойное неравенство означает, что $\sum_{p=1}^{\infty}\sum_{q=1}^{\infty} S_{pq} = S$ и что повторный ряд $\sum_{n=1}^{\infty}\sum_{m=1}^{\infty}\left(\sum_{k=1}^{\infty} a_{nmk}\right)$ сходится к сумме *S*. Аналогично доказывается сходимость двух других повторных рядов. Теорема доказана.

**Следствие из теоремы 2.** Если тройной ряд (1) сходится и сходится каждый из трёх обыкновенных рядов $\sum_{k=1}^{\infty} a_{nmk}$, $\sum_{m=1}^{\infty} a_{nmk}$ и $\sum_{n=1}^{\infty} a_{nmk}$, то суммы всех трёх повторных рядов (9) равны сумме тройного ряда (1)

$$\sum_{n=1}^{\infty}\sum_{m=1}^{\infty}\sum_{k=1}^{\infty} a_{nmk} = \sum_{n=1}^{\infty}\sum_{m=1}^{\infty}\left(\sum_{k=1}^{\infty} a_{nmk}\right) = \sum_{n=1}^{\infty}\sum_{k=1}^{\infty}\left(\sum_{m=1}^{\infty} a_{nmk}\right) = \sum_{k=1}^{\infty}\sum_{m=1}^{\infty}\left(\sum_{n=1}^{\infty} a_{nmk}\right).$$

**Замечание.** Из сходимости всех трёх повторных рядов (10) и равенства их сумм не следует даже сходимость тройного ряда (1). Чтобы показать, достаточно рассмотреть тот же ряд, который изучен в замечании 2 к теореме 1.

Рассмотрим ещё одну группу из шести рядов, которые называются повторными рядами для тройного ряда (1)

$$\sum_{n=1}^{\infty}\left(\sum_{m=1}^{\infty}\left(\sum_{k=1}^{\infty} a_{nmk}\right)\right),\ \sum_{n=1}^{\infty}\left(\sum_{k=1}^{\infty}\left(\sum_{m=1}^{\infty} a_{nmk}\right)\right),\ \sum_{m=1}^{\infty}\left(\sum_{n=1}^{\infty}\left(\sum_{k=1}^{\infty} a_{nmk}\right)\right),\ \sum_{m=1}^{\infty}\left(\sum_{k=1}^{\infty}\left(\sum_{n=1}^{\infty} a_{nmk}\right)\right),$$

$$\sum_{k=1}^{\infty}\left(\sum_{n=1}^{\infty}\left(\sum_{m=1}^{\infty} a_{nmk}\right)\right) \text{ и } \sum_{k=1}^{\infty}\left(\sum_{n=1}^{\infty}\left(\sum_{m=1}^{\infty} a_{nmk}\right)\right). \tag{12}$$

Сходимость этих повторных рядов определяется аналогично сходимости повторных рядов (7) (10). Например, первый из этих повторных рядов называется сходящимся, если сходится ряд $\sum_{k=1}^{\infty} a_{nmk}$ для каждой пары индексов *n*, *m* к сумме $S_{nm}$, далее, для каждого *n* сходится ряд $\sum_{m=1}^{\infty} S_{nm}$ к своей сумме $S_n$ и наконец, сходится ряд $\sum_{n=1}^{\infty} S_n$ к своей сумме *S*. В таком случае число *S* называют суммой повторного ряда и пишут $\sum_{n=1}^{\infty}\left(\sum_{m=1}^{\infty}\left(\sum_{k=1}^{\infty}a_{nmk}\right)\right)=S$.

Нетрудно получить теперь для повторных рядов (12) аналог теоремы Прингсхейма о повторных рядах для двойного ряда [4, с. 61]

**Теорема 3. (Аналог теоремы Прингсхейма о повторном ряде для двойного ряда).** *Если тройной ряд* (1) *сходится к сумме S и сходится повторный двойной ряд одного из повторных тройных рядов* (12) для каждого значения свободного индекса, *то соответствующий повторный тройной ряд* (12) *сходится к сумме S, то есть имеет место одно из шести равенств*

$$\sum_{n=1}^{\infty}\sum_{m=1}^{\infty}\sum_{k=1}^{\infty}a_{nmk}=\sum_{n=1}^{\infty}\left(\sum_{m=1}^{\infty}\left(\sum_{k=1}^{\infty}a_{nmk}\right)\right),\ \sum_{n=1}^{\infty}\sum_{m=1}^{\infty}\sum_{k=1}^{\infty}a_{nmk}=\sum_{n=1}^{\infty}\left(\sum_{k=1}^{\infty}\left(\sum_{m=1}^{\infty}a_{nmk}\right)\right),$$

$$\sum_{n=1}^{\infty}\sum_{m=1}^{\infty}\sum_{k=1}^{\infty}a_{nmk}=\sum_{m=1}^{\infty}\left(\sum_{n=1}^{\infty}\left(\sum_{k=1}^{\infty}a_{nmk}\right)\right),\ \sum_{n=1}^{\infty}\sum_{m=1}^{\infty}\sum_{k=1}^{\infty}a_{nmk}=\sum_{m=1}^{\infty}\left(\sum_{k=1}^{\infty}\left(\sum_{n=1}^{\infty}a_{nmk}\right)\right),$$

$$\sum_{n=1}^{\infty}\sum_{m=1}^{\infty}\sum_{k=1}^{\infty}a_{nmk}=\sum_{k=1}^{\infty}\left(\sum_{n=1}^{\infty}\left(\sum_{m=1}^{\infty}a_{nmk}\right)\right)\text{ и }\sum_{n=1}^{\infty}\sum_{m=1}^{\infty}\sum_{k=1}^{\infty}a_{nmk}=\sum_{k=1}^{\infty}\left(\sum_{n=1}^{\infty}\left(\sum_{m=1}^{\infty}a_{nmk}\right)\right).\quad(13)$$

Доказательство. Пусть тройной ряд (1) сходится к сумме *S*. Тогда для каждого вещественного $\varepsilon>0$ существует такое натуральное число $N_\varepsilon$, что для всех $n,m,k>N_\varepsilon$ справедливо неравенство (9). Переходя в этом двойном неравенстве к пределу по переменной *k*, получим, учитывая сходимость обыкновенного ряда, что

$$S-\varepsilon\le\sum_{p=1}^{n}\sum_{q=1}^{m}\lim_{k\to\infty}\sum_{r=1}^{k}a_{pqr}\le S+\varepsilon$$

или

$$S-\varepsilon\le\sum_{p=1}^{n}\sum_{q=1}^{m}S_{pq}\le S+\varepsilon\,.$$

Переходя в этом двойном неравенстве к пределу по переменной $m$, получим, учитывая сходимость повторного двойного ряда, что

$$S-\varepsilon \le \sum_{p=1}^{n} \lim_{m\to\infty} \sum_{q=1}^{m} S_{pq} \le S+\varepsilon$$

или

$$S-\varepsilon \le \sum_{p=1}^{n} S_p \le S+\varepsilon$$

Последнее двойное неравенство означает, что $\sum_{p=1}^{\infty} S_p = S$ и что повторный ряд $\sum_{n=1}^{\infty}\left(\sum_{m=1}^{\infty}\left(\sum_{k=1}^{\infty} a_{nmk}\right)\right)$ сходится к сумме $S$. Аналогично доказывается сходимость пяти других повторных рядов. Теорема доказана.

В заключении приведём аналог теоремы Маркова о равенстве повторных интегралов [4, сс. 239-240; 5, сс. 62-63], доказательство которой для тройных интегралов даётся впервые.

**Теорема 4. (Аналог теоремы Маркова).** Пусть повторный ряд

$$\sum_{n=1}^{\infty}\sum_{m=1}^{\infty}\left(\sum_{k=1}^{\infty} a_{n\,m\,k}\right) \tag{14}$$

сходится и при каждом натуральном $k$ сходится ряд $\sum_{n=1}^{\infty}\sum_{m=1}^{\infty} a_{n\,m\,k}$. Тогда

1) при каждом $p \ge 0$ сходится ряд

$$\sum_{n=1}^{\infty}\sum_{m=1}^{\infty}\left(\sum_{k=p+1}^{\infty} a_{n\,m\,k}\right) \tag{15}$$

2) для сходимости повторного ряда

$$\sum_{k=1}^{\infty}\left(\sum_{n=1}^{\infty}\sum_{m=1}^{\infty} a_{n\,m\,k}\right) \tag{16}$$

необходимо и достаточно существование предела $R=\lim\limits_{p\to\infty}R_p=\lim\limits_{p\to\infty}\sum\limits_{n=1}^{\infty}\sum\limits_{m=1}^{\infty}\left(\sum\limits_{k=p+1}^{\infty}a_{n\,m\,k}\right)$ и условие $R=0$ необходимо и достаточно для равенства сумм повторных рядов.

Доказательство. Так как

$$\sum_{k=p+1}^{\infty}a_{n\,m\,k}=\sum_{k=1}^{\infty}a_{n\,m\,k}-a_{n\,m\,1}-a_{n\,m\,2}-a_{n\,m\,3}-...-a_{n\,m\,p}=\sum_{k=1}^{\infty}a_{n\,m\,k}-\sum_{k=1}^{p}a_{n\,m\,k},$$

и каждое слагаемое является членом сходящегося ряда по $k$ (причём число таких слагаемых конечно), то ряд (15) для каждого $p\geq 0$ сходится

$$R_p=\sum_{n=1}^{\infty}\sum_{m=1}^{\infty}\left(\sum_{k=p+1}^{\infty}a_{n\,m\,k}\right)=\sum_{n=1}^{\infty}\sum_{m=1}^{\infty}\left(\sum_{k=1}^{\infty}a_{n\,m\,k}\right)-\sum_{k=1}^{p}\left(\sum_{n=1}^{\infty}\sum_{m=1}^{\infty}a_{n\,m\,k}\right).$$

Отсюда следует, что существование предела $\lim\limits_{p\to\infty}R_p$ равносильно сходимости ряда (15), а равенство $R=0$ необходимо и достаточно для равенства сумм рядов (15) и(16).

**Заключение.** В полной аналогии с теорией двойных рядов построена теория тройных рядов. В дальнейших исследованиях автор надеется перенести в теорию тройных рядов такие признаки сходимости как признак отношений, признаки сжатия и признак Ермакова.

ЛИТЕРАТУРА

1. Pringsheim A. Elementare Theorie der unendlichen Doppelreihen. *Münchener Sitzungsber. der Math.* Bd 27, (1897), ss. 101–153

2. Bromwich T.J.I. Introduction to the Theory of Infinite Series. – London: Macmillan and Com., 1908. – 511 p.

3. Wilansky A. On the convergence of double series. Bull. Amer. Math. Soc. 53 (1947), pp. 793-799.

4. Воробьёв Н.Н. Теория рядов. 4-е изд. – М.: Наука, Гл. ред. физ.- мат. лит., 1979. – 408 с.

5. Теляковский С.А. Курс лекций по математическому анализу. Семестр III. 2-е изд. - М.: МИАН, 2013. – 242 с.

6. Фихтенгольц Г.М. Курс дифференциального и интегрального исчисления. Т2. 8-е изд. – М.: ФИЗМАТЛИТ, 2003. – 864 с.

7. Кудрявцев Л.Д. Курс математического анализа. В 3-х томах, Т.2. – М.: Дрофа, 2004. – 720 с.

8. Sudhir R.G., Balmohan V.L. A Course in Multivariable Calculus and Analysis. – Springer, 2010. – VIII+475 p.

## REFERENCES

1. Pringsheim A. Elementare Theorie der unendlichen Doppelreihen. Münchener Sitzungsber. der Math. Bd 27, (1897), ss. 101–153

2. Bromwich T.J.I. Introduction to the Theory of Infinite Series. – London: Macmillan and Com., 1908. – 511 p.

3. Wilansky A. On the convergence of double series. Bull. Amer. Math. Soc. 53 (1947), pp. 793-799.

4. Vorobev N.N. Teoriya ryadov. 4-e izd. – M.: Nauka, Gl. red. fiz.- mat. lit., 1979. – 408 s.

5. Telyakovskiy S.A. Kurs lektsiy po matematicheskomu analizu. Semestr III. 2-e izd. - M.: MIAN, 2013. – 242 s.

6. Fikhtengolts G.M. Kurs differentsialnogo i integralnogo ischisleniya. T2. 8-e izd. – M.: FIZMATLIT, 2003. – 864 s.

7. Kudryavtsev L.D. Kurs matematicheskogo analiza. V 3-kh tomakh, T.2. – M.: Drofa, 2004. – 720 s.

8. Sudhir R.G., Balmohan V.L. A Course in Multivariable Calculus and Analysis. – Springer, 2010. – VIII+475 p.

# THEORY OF INFINITE TRIPLE SERIES

**I.V. TERESHCHENKO**

*Kuban State Technological University,*
*2, Moskovskaya st., Krasnodar, Russian Federation, 350072;*
*e-mail: tereshchenko57@rambler.ru*

A general theory of infinite triple series is accounted which is almost not reflected in the mathematical literature. The presentation is based on the analogy with the theory of infinite double series. The term test for divergence was found and proved. The property of linearity for triple series is given. Cauchy criterion for convergence of a triple series is pointed out. It is shown that the convergence of the triple series does not necessarily mean that its terms are bounded. A repeated series is considered and studied. Three analogs of Pringsheim theorem about the equality of the repeated series are proved. For the first time one of the possible analogs of Markov's theorem about the equality of repeated series in the case of a triple series is considered and proved.

**Key words**: infinite double series, infinite triple series, a test of convergence, a condensation test, theorem of Pringsheim, Cauchy criterion for convergence, Markoff's theorem.