УДК 517.521

ИСТОРИЯ РАЗВИТИЯ ТЕОРИИ БЕСКОНЕЧНЫХ ПОЛОЖИТЕЛЬНЫХ РЯДОВ С МОНОТОННО УБЫВАЮЩИМИ ЧЛЕНАМИ

И.В. ТЕРЕЩЕНКО

Кубанский государственный технологический университет,
350072, Российская Федерация, г. Краснодар, ул. Московская, 2;
электронная почта: tereshchenko57@rambler.ru

Я оставляю другим геометрам заботу разъяснить эту тайну и несколько других, которые можно найти в теории рядов.
Жан Д'Аламбер, «Размышления над рядами и над мнимыми корнями», 1768.

Рассмотрена история развития теории бесконечных положительных рядов с монотонно убывающими членами с древности до начала XX века. Отмечены основные этапы развития. Приведены ссылки на первоисточники. Исправлены некоторые исторические ошибки и неточности в изложении тех или иных математических открытий в теории положительных рядов. Показано развитие теории и возможные её обобщения. Дана новая оценка достижений в теории признаков сгущения французским математиком Фабри. Показано, что он автор одного из наиболее известных признаков сгущения.
Ключевые слова: бесконечный числовой ряд, бесконечный положительный числовой ряд, признак сгущения Коши, Бертран, Шлёмильх, Борель, Фабри, Кнопп.

1. Введение. Теория бесконечных числовых рядов с положительными и монотонно убывающими членами в настоящее время считается законченной математической теорией. Если не брать во внимание работы автора данной статьи, то её развитие в целом закончилось к 20-м годам XX века. Произошло это после выхода четырёх книг – малоизвестных современным математикам лекций Е. Бореля [1], совершенно напрасно забытой сегодня книги Е. Фабри [2] и двух широко известных по сей день монографий Т. Бромвича [3] и К. Кноппа [4].

2. История развития бесконечных числовых рядов с положительными и монотонно убывающими членами до начала XX века. Своё начало она берёт в одном из самых знаменитых сочинений Архимеда по математике – «О квадратуре параболы» (около 235 г. до н.э.). В этом сочинении Архимед вычислил сумму гармонической прогрессии со знаменателем равным $1/4$.

Следующий шаг был сделан известным французским математиком средневековья Николя Оремом. Именно он в трактате “Quaestions super geometriam Euclidis” («Вопросы по геометрии Евклида») доказал расходимость гармонического ряда, воспользовавшись монотонным убыванием его членов.

Третьим важным шагом было открытие в 1742 году английским математиком Колином Маклореном интегрального признака сходимости [5, p. 289]. Маклорен сформулировал этот признак геометрически:

“*… the area of APNF being continued over the same base, it is always less than the sum of all those rectangles, but greater than the sum of all rectangles after the first. Therefore the area APNF and the sum of those rectangles either both have limits or both have none*”

или в переводе на русский (все переводы выполнены автором статьи):

«*… площадь APNF, продолженная на той же основе, всегда меньше, чем сумма всех этих прямоугольников, но больше чем сумма всех прямоугольников после первых. Поэтому, площадь APNF и сумма этих прямоугольников или одновременно имеют предел, или не имеют предела*».

Яснее не скажешь! Маклорен тут же показывает, как надо использовать этот признак на примерах. Первым делом он доказывает с помощью своего признака, что обобщённый гармонический ряд

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^s}=1+\frac{1}{2^s}+\frac{1}{3^s}+\ldots+\frac{1}{n^s}+\ldots$$

сходится для показателя степени $s>1$, и расходится для показателя степени $s\le 1$. О. Коши [6, с. 26] перевёл геометрическую формулировку признака Маклорена на язык интегрального исчисления:

“*Soit* $f(x)$ *une fonction qui demeure constamment positive pour des valeurs positives de la variable x; et admettons* $1°$ *que la fonction* $f(x)$ *décroisse indéfiniment avec* $1/x$; $2°$ *que le rapport* $f(x+\theta)/f(x)$ *reste, pour des valeurs infiniment grandes de x, et pour des valeurs de* θ *qui ne surpassent pas l'unité, compris entre deux limites A, B, finies, mais différentes de zéro. La série*

$$f(0),\quad f(1),\quad f(2),\quad f(3),\quad etc\ldots,$$

sera convergente, si l’intégrale

$$\int_{n}^{n+m} f(x)dx$$

s'évanouit pour des valeurs infiniment grandes du nombre entier n, quel que soit d'ailleurs le nombre entier m; et divergente dans le cas contraire".

«*Пусть* $f(x)$ *функция, которая остается неизменно положительной для положительных значений переменной x; и предположим* 1°, *что функция* $f(x)$ *убывает до бесконечности одновременно с* $1/x$; 2°, *что отношение* $f(x+\theta)/f(x)$ *остаётся между двумя граничными значениями A и B конечным, но отличным от нуля, для бесконечно больших величин x, и для величин* θ, *которые не превышают единицы. Ряд*

$$f(0),\quad f(1),\quad f(2),\quad f(3),\quad \text{и т.д. } \ldots,$$

будет сходиться, если интеграл

$$\int_{n}^{n+m} f(x)dx$$

будет обращаться в нуль при бесконечно больших значениях целого числа n, независимо от целого числа m; и расходится в противном случае».

Формулировка Коши сложная для понимания и не такая «изящная» как у Маклорена. Сходимость или расходимость несобственного интеграла в этом варианте Коши интегрального признака фактически основывает на критерии Больцано – Коши.

Прямым следствием интегрального признака сходимости можно назвать знаменитый признак В.П. Ермакова [7]:

Пусть на промежутке $1 \le x < \infty$ *задана непрерывная монотонно убывающая положительная функция* $f(x) > 0$. *Пусть к тому же на этом промежутке задана положительная, монотонно возрастающая и неограниченна сверху всюду непрерывно дифференцируемая функция* $\varphi(x) > 0$, *удовлетворяющая неравенству* $\varphi(x) > x$. *Тогда*

1) *если начиная с некоторого значения* $x_0 \ge 1$ *выполняется условие*

$$\frac{\varphi'(x) f(\varphi(x))}{f(x)} \le q < 1, \quad x \ge x_0,$$

то ряд $\sum_{n=1}^{\infty} f(n)$ *сходится.*

2) *если начиная с некоторого значения* $x_0 \geq 1$ *выполняется условие*

$$\frac{\varphi'(x) f(\varphi(x))}{f(x)} \geq 1, \quad x \geq x_0,$$

то ряд $\sum_{n=1}^{\infty} f(n)$ *расходится.*

Одна из «тайн», связанная с этим признаком, состоит в том, что формулировка признака Ермакова не содержит и намёка на необходимость применения интегрального признака сходимости. Тем не менее, известное доказательство этого признака сходимости опирается именно на интегральный признак сходимости [3, p. 37 - 38, 4, s. 288 - 289]. Однако К. Кнопп заявил, что можно доказать признак Ермакова без применения интегрального признака, но, мол, это будет несколько громоздко [4, s. 289]:

"*Es ist nicht schwer*, *den Beweis von dem Hilfsmittel des Integrals zu befreien*; *doch wird er dadurch etwas schwerfälliger*".

«*Не трудно привести доказательство без помощи интегралов, но он будет несколько громоздким*».

С тех пор ни кто не смог предложить такое доказательство. Доказательство Е. Фабри признака Ермакова, которое он привел, не опираясь на интегральный признак сходимости, значительно сужает область применимости признака Ермакова [2, p. 46-47].

Четвёртым важным шагом в теории бесконечных числовых рядов с положительными и монотонно убывающими членами было открытие О. Коши в 1821 году простейшего признака сгущения [8, p. 135-136]:

"*Lorsque la serie*

(1) $$u_0, \quad u_1, \quad u_2, \quad \ldots \quad u_n, \quad \&\mathrm{c}, \ldots,$$

a tous ses termes positifs, *on peut ordinairement decider si elle est convergente ou divergente, à l'aide du theoreme suivant*:

3 *e* . *THEOREME*. *Lorsque dans la serie* (1) *chaque terme est inferieur a celui qui le precede, cette serie et la suivante*

$$u_0, \quad 2u_1, \quad 4u_3, \quad 8u_7, \quad 16u_{15}, \quad \&\mathrm{c}, \ldots.$$

sont en meme temps convergentes ou divergentes".

«*Когда ряд*

(1) $$u_0,\quad u_1,\quad u_2,\quad \ldots\quad u_n,\quad \&\,\mathrm{c},\ldots,$$

имеет положительные члены, обычно можно решить, является ли он сходящимся или расходящимся с помощью следующей теоремы: …

3 *я Теорема. Когда в ряде* (1) *каждый член меньше предыдущего, этот ряд и следующий ряд*

$$u_0,\quad 2u_1,\quad 4u_3,\quad 8u_7,\quad 16u_{15},\quad \&\,\mathrm{c},\ldots.$$

будут одновременно сходящимися или расходящимися»

Доказательство Коши фактически следовало идеям Николя Орезма, которые изложены нами выше и которые последний применил для доказательства расходимости гармонического ряда. Оно было очень простым и основывалось на двух системах неравенств:

$$u_0 < 2u_0,$$
$$2u_1 = 2u_1,$$
$$4u_3 < 2u_2 + 2u_3,$$
$$8u_7 < 2u_4 + 2u_5 + 2u_6 + 2u_7,$$
$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots,$$

и

$$u_0 = u_0,$$
$$2u_1 > u_1 + u_2,$$
$$4u_3 > u_3 + u_4 + u_5 + u_6,$$
$$8u_7 > u_7 + u_8 + u_9 + u_{10} + u_{11} + u_{12} + u_{13} + u_{14},$$
$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots,$$

Если первый ряд сходится, то из первой системы следует, что второй ряд будет сходиться. Если первый ряд расходится, то из второй системы следует, что второй ряд будет расходиться.

Признак сгущения Коши в русскоязычной математической литературе называют то *телескопическим признаком* (см. Википедию на русском языке, статья Телескопический признак), что, по мнению автора, совершенно ошибочно), то *признаком разряжения*. В англоязычной математической литературе за ним закрепился термин “*Cauchy condensation test*”, что переводится как «*Тест сгущения Коши*». В немецкоязычной – “*Cauchysches Verdichtungskriterium*”, что означает «*Критерий уплотнения Коши*». Удивительно, что во франкоязычной математической литературе этот признак не получил особого названия. Там его называют банально просто “*Règle de Cauchy*” – «*Правило Коши*» или “*Thèorème de Cauchy*” – «*Теорема Коши*».

Поразительная особенность признака сгущения Коши, по мнению известного немецкого математика К. Кноппа [4, s. 115], состоит в том, что довольно «редкая» подпоследовательность $\left\{a_{2^k}\right\}_{k=0}^{\infty}$ последовательности $\left\{a_n\right\}$ определяет сходимость или расходимость ряда $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$.

Удивительно, что понадобилось более сорока лет, прежде чем французский математик Бертран в 1864 году сумел найти очевидное обобщение признака сгущения Коши [9, p. 234-235], заменив степень 2^n степенью a^n, где $a \geq 2$ – целое положительное число и изменив нумерацию членов ряда более удобной. Этот признак будем называть показательным признаком сгущения Коши - Бертрана:

“*Théorème*. *Lorsque dans une série à termes positifs*

(A) $$u_1 + u_2 + \ldots + u_n + u_{n+1} + \ldots$$

chaque terme est moindre que le précédent, cette serie et la suivante

(B) $$u_1 + au_a + a^2 u_{a^2} + a^3 u_{a^3} + \ldots + a^n u_{a^n} + \ldots.$$

sont en mème temps convergentes et divergentes, *quell que soit le nombre entire désiqné par a*”.

«Теорема. Когда у ряда с положительными членами

(A) $u_1 + u_2 + \ldots + u_n + u_{n+1} + \ldots$ каждый член меньше, чем предыдущий, этот ряд и следующий

(B) $$u_1 + au_a + a^2 u_{a^2} + a^3 u_{a^3} + \ldots + a^n u_{a^n} + \ldots.$$

Будут одновременно сходящимися или расходящимися, для любого целого числа, обозначенного за *a*».

В случае $a = 2$ показательный признак сгущения называется признаком сгущения Коши [4]. Жозеф Бертран [9, p. 234 - 235], приводя доказательство показательного признака сгущения для случая $a > 2$, назвал его “Le théorème de Cauchy”, считая, по-видимому, что это обобщение признака сгущения Коши очевидным. Французские математики Эмиль Борель [1] и Евгений Фабри [2], возможно, согласились с Бертраном, считая, что признак действительно принадлежит Коши или является его очевидным обобщением, не потрудившись прояснить вопрос об авторе.

Между тем, в известных книгах по теории рядов Т. Бромвича [3, p. 24] и К. Кноппа [4, s. 115], а так же в курсе Г.М. Фихтенгольца [10, с. 317], признак сгущения Коши приводится только для случая $a = 2$. К. Кнопп и Фихтенгольц к тому же добавляют, что в признаке Коши ряд $\sum_{k=0}^{\infty} 2^k a_{2^k}$ может быть заменён общим рядом $\sum_{k=0}^{\infty} a^k u_{a^k}$, где натуральное число $a \geq 2$, не приводя ни самого доказательства, которого, кстати, нет в русскоязычной математической литературе, ни давая ссылку на источник, в котором такое доказательство было бы приведено.

О. Шлёмильх, который сам нашёл другой вариант признака сгущения, в своём «Руководстве по алгебраическому анализу» [11, s. 104 -108] приводит именно признак сгущения Коши, не упоминая его имени, и свой вариант такого признака. Приведённые доводы говорят о том, что автором признака сгущения в случае $a > 2$ является, скорее всего, сам Бертран. Поэтому мы называем этот признак не признаком сгущения Коши (это всего лишь частный случай), а показательным признаком сгущения Бертрана - Коши, учитывая заслуги обоих математиков.

Учитывая сказанное выше, следует признать, что часть математиков или читают невнимательно первоисточники, или их вовсе не читают, доверяя всему тому, что до них написали другие. В качестве подтверждения этой мысли приведём в пример современника Бореля и Фабри, датского математика Нилза

Ниелсена (нем. Niels Nielsen, 1865-1931). В своей книге [12, s. 88 - 89] он утверждает, что Коши [8] доказал признак сгущения для случая всех целых значений $a \geq 2$ (вместо *a* Ниелсен использует обозначение *p*) и даже указывает страницу книги Коши под номером 135. Увы, на указанной странице Коши всего лишь доказывает частный случай признака сгущения (*a* = 2).

Через почти 40 лет, французский математик Э. Борель в 1902 году заметил, что результат Бертрана можно распространить на случай нецелого $a > 1$ [1, p. 4]:

"*L'on pourrait supposer que a n'est pas entier* (*mais reste toujours* > 1); *alors*, *en désiquant par E*(*x*) *le plus grand entire inférieur à x l'on aurait*

$$v_n = a^n u_{E(a^n)},$$

ce que l'on peut bien encore, *pour simplifier*,

$$v_n = a^n u_{a^n}\text{''}.$$

«*Предположим*, *что a – нецелое число* (*но всё ещё* > 1); *тогда*, *обозначая через* $\mathrm{E}\left(x\right)$ *наибольшее целое число*, *меньшее*, *чем x*, *будем иметь*

$$v_n = a^n u_{E(a^n)},$$

что можно было бы изменить, *для простоты*, *на*

$$v_n = a^n u_{a^n}\text{».}$$

Бромвич [3, s. 24], а вслед за ним Кнопп [4, s. 122], в свою очередь, предложил чуть более упрощённый вариант, чем Борель, заменив ряд $\sum_{k=0}^{\infty} a^k u_{a^k}$ рядом $\sum_N N a_N$, где $N = E(a^k)$.

В 1873 году немецкий математик Оскар Шлёмильх [13] привёл вариант признака сгущения для положительных рядов с монотонно убывающими членами, отличного от признаков сгущения Коши:

Die Reihen

$$u_1 + u_2 + u_3 + u_4 + u_5 + \ldots$$

und

$$1u_1 + 2u_4 + 3u_9 + 4u_{16} + ...$$

sind demnach gleichzeitig convergent oder divergent.

Ряды

$$u_1 + u_2 + u_3 + u_4 + u_5 + ...$$

и

$$1u_1 + 2u_4 + 3u_9 + 4u_{16} + ...$$

будут одновременно сходиться или расходиться.

Этот же признак он изложил в своём «Руководстве по алгебраическому анализу», вышедшем в 1889 году [11, s. 104 - 108]. Если в признаке сгущения Коши для уплотнения ряда (A)

$$u_1 + u_2 + ... + u_n + u_{n+1} + ...$$

используется монотонно возрастающая подпоследовательность номеров членов исходного ряда $\{2^k\}, k = 0, 1, ...,$ то в признаке сгущения Шлёмильха для уплотнения ряда (A) используется другая подпоследовательность, а именно $k^2, k = 1, 2, 3, ...$. Доказательство признака сгущения Шлёмильха во многом повторяет доказательство признака сгущения Коши.

Признак Шлёмильха допускает очевидное обобщение, незамеченное как самим Шлёмильхом, так и другими ему современными математиками. Впервые на это обратил внимание К. Кнопп [4, s. 116]. Соответствующий признак сходимости назовём *степенным признаком сгущения Шлёмильха - Кноппа*. В этом признаке для уплотнения ряда используется степенная подпоследовательность $k^m, k = 1, 2, 3, ...; m = 2, 3, 4, ...,$ для которой подпоследовательность $k^2, k = 1,2,3,...$ признака сгущения Шлёмильха является частным случаем (m = 2).

Степенной признак сгущения Шлёмильха -Кноппа. *Пусть члены положительного ряда*

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n = a_1 + a_2 + a_3 + ... + a_n + ... \qquad (A)$$

не возрастают: $a_1 \geq a_2 \geq a_3 \geq \ldots \geq a_n \geq \ldots > 0$. *Тогда ряд* (A) *сходится или расходится одновременно с рядом*

$$\sum_{k=1}^{\infty}\left(k^m-(k-1)^m\right)a_{k^m}=a_{1^m}+3a_{2^m}+5a_{3^m}+\ldots+\left(k^m-(k-1)^m\right)a_{k^m}+\ldots, \quad \text{(B)}$$

где $m = 2, 3, 4, \ldots$.

Замечание 1. В ряде (B) разности $k^m - (k-1)^m$ можно заменить степенью k^{m-1} как это делается, например, в признаке Шлёмильха для случая $m = 2$. Это расширение признака Шлёмильха – Кноппа предложено автором данной статьи [14].

3. История развития бесконечных числовых рядов с положительными и монотонно убывающими членами в начале XX века. Французский математик Фабри был по-видимому первым, кто догадался перейти к рассмотрению произвольной монотонно возрастающей подпоследовательности номеров членов исходного ряда $\{n_k\}, n_{k+1} > n_k, k = 0, 1, 2, \ldots$. В 1910 году в своей книге [2, p. 44 - 45] он связал сходимость или расходимость положительного ряда (A)

$$\sum_{n=1}^{\infty}a_n = a_1 + a_2 + a_3 + \ldots + a_n + \ldots,\ a_1 \geq a_2 \geq a_3 \geq \ldots \geq a_n \geq \ldots \geq 0$$

со сходимостью или расходимостью двух положительных рядов

$$\sum_{k=0}^{\infty}(n_{k+1}-n_k)a_{n_k} \quad \text{(B)}$$

и

$$\sum_{k=0}^{\infty}(n_{k+1}-n_k)a_{n_{k+1}},\ n_{k+1} > n_k, k = 0, 1, 2, \ldots. \quad \text{(C)}$$

Соответствующий признак мы будем называть *сильным признаком Фабри*:

Если ряд (B) *сходится, то сходится ряд* (A) *и* (C). *Если ряд* (A) *сходится, то сходится ряд* (C). *Если ряд* (C) *расходится, то расходится ряд* (A) *и* (B). *Если ряд* (A) *расходится, то сходится ряд* (B).

Из сильного признака Фабри вытекает *слабый признак Фабри* (по терминологии автора данной статьи) [2, p. 44 - 45]:

Пусть члены положительного ряда (A)

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n = a_1 + a_2 + a_3 + \ldots + a_n + \ldots$$

не возрастают: $a_1 \geq a_2 \geq a_3 \geq \ldots \geq a_n \geq \ldots > 0$. *Предположим, что* $\{n_k\}$, $k = 0, 1, 2, \ldots$ *монотонно возрастающая бесконечная последовательность натуральных чисел*

$$1 \leq n_0 < n_1 < n_2 < \ldots < n_k < \ldots < +\infty .$$

Если найдутся два положительных вещественных числа A и B, таких что, начиная с некоторого номера K, выполняется неравенство

$$1 < A < \frac{n_{k+1}}{n_k} < B ,$$

то ряд (A) *и ряд*

$$\sum_{k=0}^{\infty} n_k a_{n_k} = n_0 a_{n_0} + n_1 a_{n_1} + \ldots + n_k a_{n_k} + \ldots$$

сходятся или расходятся одновременно.

Наконец, в 1922 году немецкий математик Кнопп в книге «Теория и применение бесконечных рядов» [4, 1922], показал, что если ограничить рост подпоследовательности номеров $\{n_k\}, n_{k+1} > n_k, k = 0, 1, 2, \ldots$ членов ряда (A) условием Кноппа

$$\frac{\Delta n_k}{\Delta n_{k-1}} = \frac{n_{k+1} - n_k}{n_k - n_{k-1}} < M, \quad k = 1, 2, \ldots,$$

то ряд $\sum_{k=0}^{\infty} (n_{k+1} - n_k) a_{n_{k+1}}$ можно опустить. Смысл этого неравенства очевиден. Разрыв между номерами членов ряда не должен стремительно увеличиваться. Соответствующий признак будем называть признаком сгущения Фабри – Кноппа.

Пусть члены положительного ряда $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ *не возрастают*: $a_1 \ge a_2 \ge a_3 \ge ... \ge a_n \ge ... > 0$. *Предположим, что* $\{n_k\}$, $k = 0, 1, 2, ...$ *монотонно возрастающая бесконечная последовательность натуральных чисел* $1 \le n_0 < n_1 < n_2 < ... < n_k < ... < +\infty$. *Если найдётся положительное вещественное число M, такое что, начиная с некоторого номера K, выполняется неравенство*

$$\frac{\Delta n_k}{\Delta n_{k-1}} = \frac{n_{k+1} - n_k}{n_k - n_{k-1}} < M, \quad k = 1, 2, ...,$$

то ряд $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ *и ряд* $\sum_{k=0}^{\infty} n_k a_{n_k}$ *сходятся или расходятся одновременно.*

Замечание 2. Американские математики Д. Бонар и М. Кхоури [15, p. 44] ошибочно приписали О. Шлёмильху признак сгущения Фабри – Кноппа. Ошибка возникла из-за того, что К. Кнопп, в своей книге [4], излагая обобщение признака сгущения Коши, отсутствующее у Шлёмильха, ссылается именно на последнего.

4. Заключение. Рассмотрена история теории рядов с положительными и монотонно убывающими членами от Архимеда до математиков начала XX века. Исправлены исторические не точности в авторстве многих признаков сгущения. Указано на некоторые обобщения этих признаков.

ЛИТЕРАТУРА

1. Borel É. Leçons sur les Séries a Termes Positifs. – Paris: Gauthier-Villass, 1902. – 92 p.

2. Fabry E. Théorie des Séries a Termes Constants. Applications aux Calculs Numériques. – Paris: Hermann & Fils, 1910. – 198 p.

3. Bromwich T.J.I. Introduction to the Theory of Infinite Series. – London: Macmillan and Com., 1908. – 511 p.

4. Knopp K. Theorie und anwendung der unendlichen reihen. – Berlin: Springer, 1922. – X+474 s.

5. Maclaurin C. Treatise on Fluxions. In Two Volumes. Vol. I, 2-nd ed. – London: Knight & Compton, 1801. – 413 s.

6. Cauchy A.L. Exercices de mathematiques. – Paris: 1827. – 380 p.

7. Ермаковъ В.П. Теорія сходимости безконечныхъ строкъ и определенныхъ интеграловъ. Матем. сб., Т.6, Вып. 1, (1872), сс. 39–76.

8. Cauchy A.L. Cours d'analyse de l'École royale polytechnique I.re partie: Analyse algébrique. Paris, Impr. royale Debure frères, 1821.

9. Bertrand J. Traité de Calcul Différentiel et de Calcul Intégral. Premiére Partie Calcul Différentiel. – Paris: Gauthier-Villars, 1864. – 780 p.

10. Фихтенгольц Г.М. Курс дифференциального и интегрального исчисления. В 3 т. Т2. – 8-е изд. – М.: ФИЗМАТЛИТ, 2003. – 864 с.

11. Schlömilch O. Handbuch der algebraischen Analysis. – Stuttgart: Friedrich Frommann's Verlag, 1889. – VIII+414 s.

12. Nielsen N. Lehrbuch der unendlichen Reihen. – Leipzig: B.G. Teubner, 1909. – VIII+287 s.

13. Schlömilch O. Üeber dei gleichzeitige Convergenz oder Divergenz zweier Reihen. ZfMuP, 1873, B28, S. 425-426.

14. Терещенко И.В. Признаки сгущения I. Об обобщении признака сгущения Шлёмильха. Доказательство, основанное на свойстве монотонности. [Электронный ресурс] // Научные труды КубГТУ: электрон. сетевой политематич. журн. 2014. № 5, 10 с. URL: http://ntk.kubstu.ru/file/226.

15. Bonar D.D. Khoury M. Jr. Real infinite series. – Mathematical Association of America, 2006. – 232 p.

REFERENCES

1. Borel É. Leçons sur les Séries a Termes Positifs. – Paris: Gauthier-Villass, 1902. – 92 p.

2. Fabry E. Théorie des Séries a Termes Constants. Applications aux Calculs Numériques. – Paris: Hermann & Fils, 1910. – 198 p.

3. Bromwich T.J.I. Introduction to the Theory of Infinite Series. – London: Macmillan and Com., 1908. – 511 p.

4. Knopp K. Theorie und anwendung der unendlichen reihen. – Berlin: Springer, 1922. – X+474 s.

5. Maclaurin C. Treatise on Fluxions. In Two Volumes. Vol. I, 2-nd ed. – London: Knight & Compton, 1801. – 413 s.

6. Cauchy A.L. Exercices de mathematiques. – Paris: 1827. – 380 p.

7. Ermakov" V.P. Teorija shodimosti bezkonechnyh" strok" i opred□lennyh" integralov". Matem. sb., T.6, Vyp. 1, (1872), ss. 39–76.

8. Cauchy A.L. Cours d'analyse de l'École royale polytechnique I.re partie: Analyse algébrique. Paris, Impr. royale Debure frères, 1821.

9. Bertrand J. Traité de Calcul Différentiel et de Calcul Intégral. Premiére Partie Calcul Différentiel. – Paris: Gauthier-Villars, 1864. – 780 p.

10. Fihtengol'c G.M. Kurs differencial'nogo i integral'nogo ischislenija. V 3 t. T2. – M.: FIZMATLIT, 2003. – 864 s.

11. Schlömilch O. Handbuch der algebraischen Analysis. – Stuttgart: Friedrich Frommann's Verlag, 1889. – VIII+414 s.

12. Nielsen N. Lehrbuch der unendlichen Reihen. – Leipzig: B.G. Teubner, 1909. – VIII+287 s.

13. Schlömilch O. Üeber dei gleichzeitige Convergenz oder Divergenz zweier Reihen. ZfMuP, 1873, B28, S. 425-426.

14. Tereshhenko I.V. Priznaki sgushhenija I. Ob obobshhenii priznaka sgushhenija Shljomil'ha. Dokazatel'stvo, osnovannoe na svojstve monotonnosti. [Jelektronnyj resurs] // Nauchnye trudy KubGTU: jelektron. setevoj politematich. zhurn. 2014. № 5, 10 s. URL: http://ntk.kubstu.ru/file/226.

15. Bonar D.D. Khoury M. Jr. Real infinite series. – Mathematical Association of America, 2006. – 232 p.

ON THE HISTORY OF D'ALEMBERT'S TEST CONVERGENCE OF AN INFINITE POSITIVE SERIES

I.V. TERESHCHENKO

Kuban State Technological University,
2, Moskovskaya st., Krasnodar, Russian Federation, 350072;
e-mail: tereshchenko57@rambler.ru

The history of the development of the theory of infinite series with positive monotone decreasing terms from antiquity to the beginning of the XX century is considered. Noted the main stages of development are noted. The links with the original sources are provided. Some historical errors and inaccuracies in the presentation of certain mathematical discoveries in the theory of positive series are fixed. The development of the theory and its possible generalizations are shown. It is given the new evaluation of the achievements in the theory of condensation tests of the French mathematician Fabri. It is shown that he was the author of one of the most prominent condensation test.

Key words: infinite series, a positive infinite series, condensation test of Cauchy, Bertrand J., Schlömilch O., Borel É., Fabry E., Knopp K.