УДК 513.628

МОДЕЛИРОВАНИЕ СОСТАВНЫХ ПОВЕРХНОСТЕЙ ПОСРЕДСТВОМ ДВУХ СТЕРЕОГРАФИЧЕСКИХ ПРОЕЦИРОВАНИЙ

Е.Ю. КОСЯКОВА

Кубанский государственный технологический университет,
350072, Российская Федерация, г. Краснодар, ул. Московская, 2;
электронная почта: betulla@list.ru

Предлагается методика геометрического моделирования составных поверхностей, их линейных и сетчатых каркасов посредством стереографических проецирований с использованием плоскостной модели, заданной в виде двух бирациональных преобразований с общим центром, инвариантные кривые которых представляют гладкие одномерные обводы. Автором рассматриваются вопросы решения обратной задачи конструирования поверхностей. Отображая с помощью двух центральных проецирований соответственные в составном преобразовании точки и линии плоскостной модели в виде одномерного обвода, получаем массив точек или непрерывный каркас линий двумерного обвода. Совпадение двух общих слабоинвариантных прямых в этом варианте задания модели на плоскости влечет за собой касание отсеков моделируемых поверхностей вдоль линии – образу совпавших слабоинвариантных прямых единого составного преобразования плоскости, которое является моделью двумерного обвода. Свойства моделируемых поверхностей и их непрерывных моделей взаимосвязаны. Они зависят от их взаимного положения в пространстве и выбранного аппарата проецирования

Ключевые слова: гладкие одномерные обводы, двумерные обводы, стереографическое проецирование, центральные кремоновы преобразования, гомолоид, инвариантная кривая, фундаментальная система, центр преобразования, прообраз.

Для конструирования технических поверхностей широкое распространение получил кинематический способ, отличающейся простотой образования и наглядностью задания поверхности на чертеже. Однако дискретность задания поверхности из-за произвольности в задании линий каркаса, выборе способов его уплотнения значительно усложняет получение ее математической модели.

Недостатки кинематического способа привели к появлению новых подходов к конструированию поверхностей. Одним из них является метод конструирования посредством нелинейных преобразований пространства, позволяющий получать искомую поверхность, как образ плоскости.

Так, задав в качестве модели некоторой конструируемой поверхности Ф соответствие Т порядка n , можно взять пучок прямых или кривых линий в поле π и получить соответственный ему пучок линий, принадлежащий полю π'.

Выбрав аппарат отображения соответственных в преобразовании T точек A плоской модели, конструируется поверхность Φ^n как множество точек A-образов соответственных пар $A \cong A'$ модели. При этом на аппарат проецирования и плоскостную модель накладываются необходимые условия [1].

Предлагаемый подход к решению задачи конструирования поверхностей позволяет конструировать также гладкие двумерные обводы. Для этого на плоскости изображения выбирается несколько центральных преобразований, центры и инвариантные кривые которых имеют строго определенное взаимное положение. Заданные преобразования принимаются за составную модель конструируемого двумерного обвода. Проецированием соответственных точек и линий модели получается поверхность, состоящая из двух и более отсеков, как двумерный массив точек или непрерывный каркас линий.

Предлагаемый подход к конструированию гладких одномерных обводов, основанный на использовании составных преобразований как моделей составных поверхностей, был в общих чертах намечен в работе [2].

Суть его состоит в отображении участков одного прообраза в различных преобразованиях в составляющие одного образа.

Рассмотрим конкретный случай, когда инвариантные коники d^2, $\overline{d}^2$ двух центральных инволюций I_2, $\bar{I}_2$ второго порядка с центром в точке $F_1 = \overline{F}_1$ имеют двухточечное касание в точках $D = \overline{D}$, $D' = \overline{D}'$, колинейных с общим центром $F_1 = \overline{F}_1$ преобразований (рис.1).

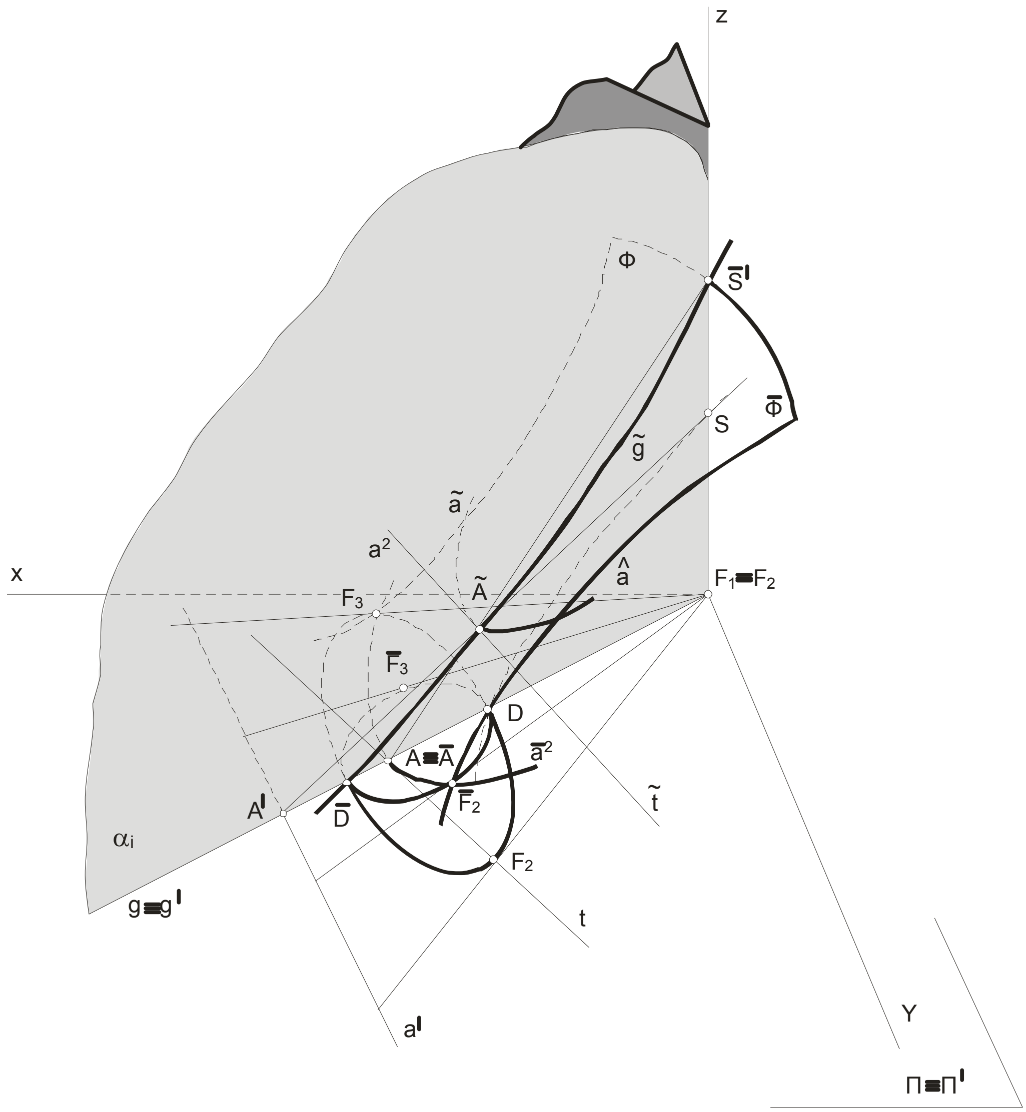

Рисунок 1 – Конструирование двумерного обвода на основе стереографических проецирований

Отображая с помощью некоторого аппарата проецирования (на рис.1 посредством двух центральных проецирований) соответственные в составном преобразовании точки $A' \cong A$ линии $a' \cong (a^2, \bar{a}^2)$, получаем точки $\tilde{A}$ линии ($\tilde{a}$, $\hat{a}$) двумерного обвода. Порядки этих линий зависят от характеристик аппарата проецирования и модели.

Совпадение двух общих слабоинвариантных прямых $g = g'$ в этом варианте задания модели в плоскости $\pi = \pi'$ влечет за собой касание отсеков поверхностей Ф, $\bar{Ф}$ вдоль линии $\tilde{g}$ - образу совпавших слабоинвариантных прямых $g = g'$. Прямой a' поля π' в инволюциях I_2, $\bar{I}_2$ соответствуют коники $a^2, \bar{a}^2$ в поле π. Соответственно дуги линий $a \cong a^2$ и $a \cong \bar{a}^2$ отображаются в пространстве в кривые $\tilde{a}$, $\hat{a}$, имеющие в точке $\tilde{A} = \tilde{g} \cap (\tilde{a}, \hat{a})$ касательную $\tilde{t}$. Последнее обстоятельство доказывает, что поверхности Ф, $\overline{\Phi}$ вдоль кривой $\tilde{g}$ имеют соприкосновение первого порядка.

Отображая соответствующие в инволюциях I_2, $\bar{I}_2$ точки самосоответственных прямых $g_i = \bar{g}_i$, являющихся линиями пересечений плоскостей α_i пучка (l) с плоскостью изображений $\pi = \pi'$, получим в пространстве линейный каркас плоских кривых $\tilde{g}_i$ конструируемого обвода, состоящего из отсеков поверхностей Ф, $\overline{\Phi}$ (рис.1). Если в плоскости π или π' взять некоторый пучок прямых линий или кривых и построить их образы в инволюциях I_2, $\bar{I}_2$, а затем отобразить их на пространство выбранным аппаратом проецирования, то получаем сетчатый каркас линий($\tilde{g}_i$), $(\tilde{a}_i)$ конструируемого двумерного обвода.

Подтвердим вышеизложенное рассмотрением конкретного примера конструирования двумерного обвода первого порядка гладкости с выводом уравнений его составляющих.

В качестве модели конструируемого обвода используем составное преобразование, инвариантной кривой которого будет одномерный обвод, состоящий из дуг двух кривых второго порядка d^2, $\bar{d}^2$. В этом случае фактически имеем два инволюционных преобразования с общим центром: I_2 - с центром $F_1 = \overline{F}_1$ и инвариантной кривой d^2, а также $\bar{I}_2$- с центром $F_1 = \overline{F}_1$ и инвариантной кривой $\bar{d}^2$. Некоторой прямой a' плоскости π' в преобразования I_2 соответствует кривая a^2 второго порядка, в преобразовании $\bar{I}_2$ - кривая $\bar{a}^2$. В общей точке A двух гомолоидов a^2и $\bar{a}^2$, колинейной с точками $D, \overline{D}$ соприкосновение инвариантных кривых d^2, $\bar{d}^2$ будет общая касательная t, если общий центр $F_1 = \overline{F}_1$ данных инволюций будет колинеен с точками $D, \overline{D}$.

Пусть уравнения инвариантной кривой d^2 имеет вид: $4(x-6)+y=16$.

На вторую инвариантную кривую наложим следующие условия: коника $\bar{d}^2$ должна касаться кривой d^2 в точках (4;0) и (8;0), колинейных с точкой F_1= $\bar{F}_1$ (0;0). В этом случае уравнение $\bar{d}^2$ примет вид: $(x-6)^2+y^2=16$.

Первое преобразование I_2 имеет следующие операторы, выведенные согласно методике, описанной в [1]:

$$x_A = x_{A'}\frac{24x_{A'}-128}{4x_{A'}^2+y_{A'}^2-24x_{A'}}, \qquad y_A = y_{A'}\frac{24x_{A'}-128}{4x_{A'}^2+y_{A'}^2-24x_{A'}}. \tag{1}$$

Аналогично получены формулы второго преобразования $\bar{I}_2$, которые имеет вид:

$$x_{\bar{A}} = x_{A'}\frac{6x_{A'}-32}{x_{A'}^2+y_{A'}^2-6x_{A'}}, \qquad y_{\bar{A}} = y_{A'}\frac{6x_{A'}-32}{x_{A'}^2+y_{A'}^2-6x_{A'}}. \tag{2}$$

Некоторой a' прямой, имеющей уравнение $y=-2x+20$ в преобразовании I_2 соответствует кривая второго порядка a^2. Выведем уравнение этой кривой путем подстановки в уравнение прямой значений x_A и y_A из формул преобразования I_2. Имеем:

$$32x^2+20y^2-24xy-224x+128y=0. \tag{3}$$

Этой же прямой в преобразовании $\bar{I}_2$ соответствует кривая второго порядка $\bar{a}^2$, уравнение которой получается путем подстановки значений $x_{\bar{A}}$, $y_{\bar{A}}$ из формул преобразования в уравнение прямой a':

$$4x^2+10y^2-3xy-28x+16y=0 \tag{4}$$

Точке A' прямой a', колинейной с центром преобразований F_1= $\bar{F}_1$, точками $D, \bar{D}$, соответствует точка A как в преобразовании I_2, так и преобразовании $\bar{I}_2$, т.е. она является общей для двух гомолоидов a^2 и $\bar{a}^2$.

Продифференцировав уравнения кривых a^2 и $\bar{a}^2$, записанных в неявном виде:

$$\frac{dy}{dx}=\frac{64x-24y-224}{40y-24x+128}, \qquad \frac{dy}{dx}=\frac{8x-3y-28}{40y-24x+128} \tag{5}$$

и подставив в эти выражения координаты точки $A(0;7)$, получим равные значения угловых коэффициентов касательных ($k_1 = k_2 = 5{,}6$), проведенных к гомолоидам в этой точке, что подтверждает наличие в точке A соприкосновение первого порядка.

Теперь перейдем к решению обратной задачи моделирования поверхностей по предложенной составной модели, отображая с помощью некоторого аппарата проецирования соответственные точки линии a' и составной кривой (a^2, $\bar{a}^2$).

Аппарат проецирования зададим с помощью связок прямых (S) и ($\bar{S}'$) с координатами $S(0;0;2)$ и $\bar{S}'(0;0;4)$. Проецируя соответственные точки полей π, π' получим в пространстве множество точек $\tilde{A}_i$, которые опишут двумерный обвод, состоящий из отсеков поверхностей $\Sigma^n, \bar{\Sigma}^n$.

Запишем уравнения проецирующих линий $A'S$, как уравнение прямой, проходящей через две точки и выразим значения $x_{A'}$ и $y_{A'}$.

Из уравнений прямых ($\bar{S}'A$), ($\bar{S}'\bar{A}$) имеем соответственно следующую пару выражений:

$$\frac{x}{x_A} = 1 - \frac{z}{4}, \qquad \frac{x}{x_{\bar{A}}} = 1 - \frac{z}{4}, \tag{6}$$

в которую подставим значения x_A , $x_{\bar{A}}$ из формул преобразования I_2, $\bar{I}_2$, в результате чего получим уравнения:

$$\frac{x}{x_{A'}\dfrac{24x_{A'} - 128}{4x_{A'} + y_{A'} - 24x_{A'}}} = 1 - \frac{z}{4}, \quad \frac{x}{x_{A'}\dfrac{6x_{A'} - 32}{x_{A'} + y_{A'} - 6x_{A'}}} = 1 - \frac{z}{4}. \tag{7}$$

Подставив в них значения $x_{A'}$ и $y_{A'}$ из уравнения проецирующей линии $A'S$,, получим уравнения поверхностей $\Sigma^n, \bar{\Sigma}^n$, которые после упрощения имеют вид:

$$-4x^3 - xy^2 - 18zx^2 + 48x^2 - 16xz^2 + 96xz - 128x = 0, \tag{8}$$

$$-2x^3 - 4xy^2 - 18zx^2 + 48x^2 - 16xz^2 + 96xz - 128x = 0. \tag{9}$$

Таким образом, составляющими конструируемого обвода являются отсеки поверхностей третьего порядка.

Рассмотренный пример дает представление о возможностях кремоновых преобразований в конструировании гладких одномерных обводов и демонстрирует то, что совокупность двух и более преобразований плоскости можно толковать как единое составное преобразование, которое является моделью двумерного обвода в вопросах конструирования технических поверхностей. Применение предлагаемого способа конструирования поверхностей существенно упростит создание математической модели двумерных обводов при последующем решении задач с ее участием.

ЛИТЕРАТУРА

1.Иванов Г.С. Конструирование технических поверхностей.- М.: Машиностроение, 1987. – 188с.

2. Косякова Е.Ю. Построение моделей гладких двумерных обводов / Труды КубГТУ: научный журнал, том 20.- Краснодар: КубГТУ, 2005.- с. 196-202.

REFERENCES

1.Ivanov G.S. Konstruirovanie tekhnicheskikh poverkhnostey.- M.: Mashinostroenie, 1987. – 188s.

2. Kosyakova E.YU. Postroenie modeley gladkikh dvumernykh obvodov / Trudy KubGTU: nauchnyy zhurnal, tom 20.- Krasnodar: KubGTU, 2005.- s. 196-202.

MODELLING OF COMPOUND SURFACES BY MEANS OF TWO STEREOGRAPHIC PROJECTIONS

E.YU. KOSYAKOVA

Kuban State Technological University,
2, Moskovskaya st., Krasnodar, Russian Federation, 350072;
e-mail: betulla@list.ru

In this article is offered the technique of geometrical simulation of composite surfaces, their linear and mesh frames by means of stereographic projections with use of planar model, to the given in a type of two birational conversions with the general center which invariant curves represent smooth one-dimensional contours. The author considers questions of the solution of the reverse task of constructioning of surfaces. Displaying by means of two central projections corresponding points and lines of composite conversion of planar model in the form of one-dimensional contour, we receive an array of points or the continuous frame of lines of two-dimensional contour. Coincidence of two general self-appropriate straight lines in this variant of the task of model on the plane involves a contact of parts of the surfaces of the modelled surface along the line – an image of the matched self-appropriate straight lines of uniform composite conversion of the plane which is model of two-dimensional contour. Properties of the modelled surfaces and their continuous models are interconnected. They depend on their mutual position in space and the selected projection device.

Key words: smooth one-dimensional contours, two-dimensional contours, stereographic projection, central kremonova of transformation, гомолоид, invariant curve, fundamental system, center of transformation, prototype.