УДК 517.521

ОБ ИСТОРИИ ПРИЗНАКА ДАЛАМБЕРА СХОДИМОСТИ БЕСКОНЕЧНОГО ПОЛОЖИТЕЛЬНОГО РЯДА

И.В. ТЕРЕЩЕНКО

Кубанский государственный технологический университет,
350072, Российская Федерация, г. Краснодар, ул. Московская, 2;
электронная почта: tereshchenko57@rambler.ru

Рассмотрена история возникновения известного и часто применяемого признака Даламбера сходимости бесконечного положительного ряда, известного как признак отношений. На основе первоисточника показано, что Даламбер не имеет к нему никакого отношения. В цитируемой работе Даламбера, которую часто объявляют как содержащую доказательство признака, признак Даламбера отсутствует. Из работы Даламбера следует, что он связывал сходимость и расходимость ряда с монотонностью модулей членов ряда. Даламбер сумел правильно исследовать сходимость и расходимость биноминального ряда. Расходимость биноминального ряда он правильно обосновывает неограниченным возрастанием *n*-го члена ряда с ростом *n* до бесконечности. Подтверждена правильность оценок работы Даламбера Фихтенгольцем и Юшкевичем. Вопрос об авторстве признака Даламбера можно пока считать открытым.

Ключевые слова: бесконечный числовой ряд, бесконечный положительный числовой ряд, признак Даламбера, признак отношений, признак отношений Коши.

1. Введение. Едва ли не самым известным и часто применяемым признаком сходимости бесконечных вещественных рядов с положительными членами является *признак Даламбера* [1-5] или *признак отношений* [6, 7], иногда называемый *признаком отношений Коши* [8]:

Признак Даламбера. Бесконечный вещественный положительный ряд $\sum_{n=1}^{\infty} a_n,\ a_n > 0$ сходится, если начиная с некоторого номера N, для всех номеров членов ряда $n > N$ выполняется неравенство $\frac{a_{n+1}}{a_n} \le q < 1$, и расходится, если начиная с некоторого номера N, для всех номеров членов ряда $n > N$ выполняется неравенство $\frac{a_{n+1}}{a_n} \ge 1$.

Признаку Даламбера можно придать предельную форму [1-13]:

Признак Даламбера в предельной форме. Бесконечный вещественный положительный ряд $\sum_{n=1}^{\infty} a_n,\ a_n > 0$ сходится, если $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} = q$, где $0 \le q < 1$, и расходится, если $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} = q$, где $1 < q \le \infty$.

Или усиленную предельную форму[11, 12]:

Признак Даламбера в усиленной предельной форме. Бесконечный вещественный положительный ряд $\sum_{n=1}^{\infty} a_n,\ a_n > 0$ сходится, если $\overline{\lim\limits_{n\to\infty}} \frac{a_{n+1}}{a_n} = \underline{\lim\limits_{n\to\infty}} \frac{a_n}{a_{n+1}} = q$, где $0 \le q < 1$, и расходится, если $\underline{\lim\limits_{n\to\infty}} \frac{a_{n+1}}{a_n} = \overline{\lim\limits_{n\to\infty}} \frac{a_n}{a_{n+1}} = q$, где $1 < q \le \infty$.

Во многих процитированных выше источниках, за исключением книг [4, 6, 7, 8, 11, 13], авторство признака признаётся за великим французским математиком Даламбером, иногда с указанием года доказательства признака – 1768 год. Ещё реже можно найти ссылку на саму работу Даламбера [14, pp. 171–183].

2. Доказал ли Даламбер признак Даламбера? Многие математики согласны с тем, что признак Даламбера принадлежит Даламберу. Однако нашлись математики, которые выступили фактически против этого утверждения.

Например, К. Кнопп [8], назвав признак признаком отношений Коши, просто сослался на «Алгебраический анализ» О. Коши [13], забыв указать, что речь идёт о предельной форме признака. Действительно, у Коши мы находим для ряда с положительными членами

$$u_0,\ u_1,\ u_2, \dots,\ u_n,\ \&c.\ \dots \tag{1}$$

следующую теорему (Коши, увы, не дал название этому признаку):

“Théorème. Si, pour des valeurs croissantes de n, le rapport u_{n+1}/u_n converge vers une limite fixe k, la série (1) sera convergente toutes les fois que l’on aura $k<1$, et divergente toutes les fois que l’on aura $k<1$” [13, p. 134].

В переводе на русский язык она звучит так (все переводы на русский язык сделаны автором статьи):

«Теорема. Если, для увеличивающихся величин n, отношение u_{n+1}/u_n сходится к определённому пределу k, то ряд (1) сходится всякий раз, когда будем иметь $k<1$, и расходится всякий раз, когда будем иметь $k<1$»

Однако Коши опубликовал свой «Алгебраический анализ» в 1821 году уже после смерти Даламбера (1783 г), не утруждая себя вопросом об авторстве признаков сходимости. Так, что К. Кнооп не дал никаких доказательств в пользу своей версии.

Другим оказался известный советский математик Г.М. Фихтенгольц. Во второй части своего известного учебника «Основы математического анализа» в замечании к пункту 239 он пишет:

«Замечание. Мы сохранили за изложенным признаком имя Даламбера, как это делается обычно. Но на деле у Даламбера не было отчетливого представления о сходимости ряда и об его сумме как пределе частичных сумм. Даламбер предостерегает от пользования рядами, у которых отношение последующего члена к предыдущему окончательно становится абсолютно большим единицы и считает такие ряды «ошибочными». Для того чтобы ряд был «хорошим и неошибочным», он требует лишь, чтобы упомянутое отношение окончательно становилось (абсолютно) меньшим единицы; подчеркнем, что мы потребовали выше другого, а именно, чтобы это отношение становилось меньшим постоянной правильной дроби q! Условие Даламбера недостаточно для сходимости ряда в современном смысле: оно, например, выполняется для заведомо расходящегося гармонического ряда $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n}$ » [4, с. 23].

Однако этим одним замечанием Фихтенгольц не ограничивается. В очерке истории рядов из того же учебника он пишет:

«Впрочем, самое понятие сходимости и расходимости у Даламбера имело «локальный» характер, будучи связано с тем, оказывается ли последующий член (абсолютно) меньшим или большим предыдущего. Таким образом, по его терминологии, ряд мог до определенного места сходиться и лишь потом начать расходиться, и наоборот [ср. замечание п° 239]» [4, с. 106].

Поражает в высказываниях Г.М. Фихтенгольца осторожность и сдержанность, с какой он пишет о понимании сходимости и расходимости бесконечного ряда Даламбером. По существу Фихтенгольц говорит о полном непонимании этих вопросов Даламбером и об отсутствии у него какого-либо обоснования признака сходимости отношений. Фихтенгольц утверждает, что для Даламбера сходящийся ряд - это ряд, члены которого по абсолютной величине монотонно убывают, начиная с некоторого места, а расходящийся ряд – это ряд, члены которого, напротив, с некоторого места по абсолютной величине монотонно возрастают. В таком случае признак отношений Даламберу просто не нужен, так как он заменяется определением сходящегося и расходящегося бесконечного числового ряда. Так как Фихтенгольц не даёт ссылки на работы Даламбера по бесконечным числовым рядам, и не приводит никаких доказательств в пользу своих утверждений, то читателю остаётся или согласиться с его утверждениями или не согласиться с ними.

Не будем и мы спешить, утверждая без всяких оснований, что Фихтенгольц прав или неправ, тем более что доказательства своей правоты последний не привёл, и перейдём к рассмотрению точки зрения ещё одного советского математика А.П. Юшкевича, одного из крупнейших историков математики XX века. В третьем томе известнейшего трёх томного сочинения «История математики с древнейших времён до начала XIX века», главным редактором которого он был, в седьмой главе «Дифференциальное и интегральное исчисление», написанной самим А.П. Юшкевичем, в параграфе «Проблемы сходимости рядов» он пишет:

«Даламбер рассмотрел вопрос об условиях сходимости знакоположительного ряда, изучая разложение $(1+\mu)^m$ при произвольном m («Математические сочинения». Opuscules mathematiques. Paris, v. II, 1768). Современный термин «признак сходимости Даламбера» исторически, по-видимому, не оправдан. Даламбер называет здесь ряд сходящимся (расходящимся), начиная с некоторого места, если члены его далее монотонно убывают (возрастают). Так, в случае разложения $\left(1+\frac{200}{199}\right)^{1/2}$ вначале имеет место сходимость, расходимость же наступает с 300-го члена. При этом Даламбер указал, что ряд даст верные результаты только если он, начиная с некоторого члена и до бесконечности, сходится (в его смысле слова); в частности, биномиальный ряд сходится (также и в нашем смысле), когда - $-1<\mu<1$. Вполне корректно высказал критерий сходимости, о котором идет речь, Варинг в «Аналитических размышлениях» (Meditationes analyticae, Ed. 1, Cantabrigae, 1770; Ed. 2, 1781): ряд $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ расходится (сходится), если отношение $u_n : u_{n+1}$ при бесконечно большом n меньше (больше) единицы. Формулировка этого критерия в терминах теории пределов принадлежит Коши (1821)» [15, с. 302].

Практически Юшкевич поддержал Фихтенгольца. Однако, в отличие от Фихтенгольца, он в качестве доказательства разбирает работу Даламбера – «Математические сочинения», причём указывает её название и на языке оригинала, то есть на французском языке – “Opuscules mathematiques”, Paris, v. II, 1768. В ней Даламбер рассмотрел вопрос о сходимости и расходимости бесконечного ряда, рассматривая биноминальный ряд

$$(1+\mu)^m = 1 + m\mu + \frac{m(m-1)}{2}\mu^2 + \ldots + \frac{m(m-1)\cdot\ldots\cdot(m-n+2)}{2\cdot 3\cdot\ldots\cdot(n-1)}\mu^{n-1} + \ldots \quad (2)$$

Увы, ссылка, данная А.П. Юшкевичем очень неточна, а для историка математики такого ранга даже нелепа. Дело в том, что работа Даламбера [14] является тридцать пятым мемуаром (trente-cinquiéme mémoire), то есть научным докладом, под называнием “Réflexions sur les Suites & sur les Racines imaginaires” («Размышления о последовательностях и о мнимых корнях»). Помещён он в первой части пятого тома «Краткие математические сочинения или мемуары по различным разделам геометрии, механики, оптики, астрономии и т.д.» Даламбера (“Opuscules mathematiques, ou mémoires sur différens Sujets de Géométrie, de Méchanique, d'Optique, d'Astronomie, &c.” Par M. d’Alembert), изданного в Париже в 1768 году.

Мемуар состоит из двух параграфов. Первый параграф “Réflexions sur les Suites divergentes ou convergentes” («Размышления о последовательностях расходящихся и сходящихся») как раз тот, который нам нужен и состоит из тридцати двух пунктов, занимающих страницы с 171 по 183. Второй параграф с длинным названием “Sur l’expression de certaines quantités imaginaires & à cette occasion sur les racines des equations du traisiéme degré dans le cas irréductible” («О выражении некоторых мнимых величин и, поэтому случаю, о корнях уравнений третей степени в неприводимом случае») нас, очевидно, интересовать не должен.

Свой мемуар Даламбер начинает так (орфография исправлена автором статьи на современную):

“1. Si on éleve $1+\mu$ à la puissance m, le terme ne de la serie sera $\mu^{n-1}\dfrac{m(m-1)...(m-n+2)}{2\cdot 3\cdot 4\cdot ...\cdot(n-1)}$, & le suivant, c’est-à-dire le $(n+1)$e, sera $\mu^{n}\dfrac{m(m-1)...(m-n+1)}{2\cdot 3\cdot 4\cdot ...\cdot(n-1)n}$; donc le rapport du $(n+1)$e terme an ne sera $\dfrac{\mu(m-n+1)}{n}$; or pour que la serie soit convergente, il faut que ce rapport (abstraction faite du signe qu’il doit avoir) soit < que l’unité.

2. Remarquons d’abord que la formule précédente donnera le moyen de former très-promptement les termes d’une suite : par exemple, si $m=\dfrac{1}{2}$, il faudra multiplier

le premier terme par $\mu\times\frac{1}{2}$ pour avoir le second; le second par $-\mu\left(1-\frac{3}{4}\right)$ pour avoir le troisiéme; le troisiéme par $-\mu\left(1-\frac{3}{6}\right)$ pour avoir le quatrième, & ainsi de suite, ce qui donne

$$1+\frac{\mu}{2}-\frac{\mu\mu}{2\cdot 4}+\frac{\mu^3 3}{2\cdot 4\cdot 6}-\frac{\mu^4 3\cdot 5}{2\cdot 4\cdot 6\cdot 8}+\frac{\mu^5 3\cdot 5\cdot 7}{2\cdot 4\cdot 6\cdot 8\cdot 10}, \&c.$$

Si $m=\frac{1}{3}$, on aura de même

$$1+\frac{\mu}{3}-\frac{2\mu\mu}{3\cdot 6}+\frac{\mu^3 2\cdot 4}{3\cdot 6\cdot 8}-\frac{\mu^4 2\cdot 4\cdot 6}{3\cdot 6\cdot 8\cdot 10}+\frac{\mu^5 2\cdot 4\cdot 6\cdot 8}{3\cdot 6\cdot 8\cdot 10\cdot 12}, \&c.$$

3. Et en général, si $m=\frac{p}{q}$, il faudra toujours multiplier le dernier terme trouvé par $\mu\left(-1+\frac{p+q}{qn}\right)$. Voyons main tenant les conditions qui rendent la serie convergente" [14, pp. 171 - 172].

«1. Если возвести $1+\mu$ в степень m, то n-й член ряда будет равен $\mu^{n-1}\frac{m(m-1)...(m-n+2)}{2\cdot 3\cdot 4\cdot ...\cdot n-1}$, а следующий, то есть $(n+1)$-й, будет равен $\mu^{n}\frac{m(m-1)...(m-n+1)}{2\cdot 3\cdot 4\cdot ...\cdot (n-1)n}$; поэтому отношение $(n+1)$-го члена к n-му будет равно $\frac{\mu(m-n+1)}{n}$; однако для того, чтобы ряд был сходящимся, надо чтобы это отношение (исключая знак, который оно имеет) было бы < единицы.

2. Отметим сначала, что предыдущая формула дает способ весьма быстро составлять члены последовательности: например, если $m=\frac{1}{2}$, то умножим первый член на $\mu\times\frac{1}{2}$ для получения второго; второй – на $-\mu\left(1-\frac{3}{4}\right)$ для

получения третьего; третий – на $-\mu\left(1-\frac{3}{6}\right)$ для получения четвертого, и так далее, что дает

$$1+\frac{\mu}{2}-\frac{\mu\mu}{2\cdot 4}+\frac{\mu^3 3}{2\cdot 4\cdot 6}-\frac{\mu^4 3\cdot 5}{2\cdot 4\cdot 6\cdot 8}+\frac{\mu^5 3\cdot 5\cdot 7}{2\cdot 4\cdot 6\cdot 8\cdot 10}, \&c$$

Если $m=\frac{1}{3}$, получим так же

$$1+\frac{\mu}{3}-\frac{2\mu\mu}{3\cdot 6}+\frac{\mu^3 2\cdot 4}{3\cdot 6\cdot 8}-\frac{\mu^4 2\cdot 4\cdot 6}{3\cdot 6\cdot 8\cdot 10}+\frac{\mu^5 2\cdot 4\cdot 6\cdot 8}{3\cdot 6\cdot 8\cdot 10\cdot 12}, \&c.$$

3. В общем, если $m=\frac{p}{q}$, то, как обычно, надо будет умножить последнее найденное слагаемое на $\mu\left(-1+\frac{p+q}{qn}\right)$. Теперь давайте рассмотрим условия, выполнение которых делают ряд сходящимся».

Итак, мы видим, что Даламбер уже в самом начале мемуара в п.1 1-го параграфа ставит задачу об условиях сходимости биноминального ряда, и занимается ею на протяжении почти всего 1-го параграфа мемуара. В п.2 он вычисляет биноминальный ряд для значений $m=\frac{1}{2}$ и $m=\frac{1}{3}$. Из этих разложений становится понятным, что биноминальный ряд для достаточно больших по номеру членов становится знакопеременным для положительных значений μ и знакоположительным для отрицательных значений μ. Об этом Даламбер говорит в п.20 1-го параграфа:

“20. Donc si μ est négatif, les termes de la serie seront de même signe, à commencer au terme n, tel que n ou $1+\omega$ soit $>1+m$; au contraire, si μ est positif, les termes seront de signes alternatifs, à commencer par celui où n est $>1+m$” [14, p. 177].

«20. Так что если μ отрицательно, то члены ряда будут иметь один и тот же знак, начиная с n-го члена, такого, что n или $1+\omega$ будут $>1+m$. Наоборот, если μ положительно, то члены будут иметь переменные знаки, начиная с $n>1+m$»

К сожалению, в мемуаре Даламбера отсутствуют внятные разъяснения последним основных понятий теории бесконечных рядов, таких как сумма бесконечного ряда и сходимость (расходимость) бесконечного ряда. Даже название доклада и первого параграфа противоречат содержанию доклада. В названии доклада говорится, что это размышления автора о последовательностях, в названии первого параграфа говорится, что это размышления о последовательностях сходящихся и расходящихся, хотя речь идёт о сходимости или расходимости биноминального ряда. Неясно так же, какие условия сходимости (то есть признаки сходимости) бесконечных рядов известны Даламберу.

О понятии суммы ряда у Даламбера в мемуаре нет ни слова. Сходимость ряда он трактует очень своеобразно. Уже в п.1 1-го параграфа (см. цитату выше) он говорит о биноминальном ряде следующее: «отношение $(n+1)$-го члена к n-му будет равно $\dfrac{\mu(m-n+1)}{n}$; однако для того, чтобы ряд был сходящимся, надо чтобы это отношение (исключая знак, который оно имеет) было бы меньше единицы». В п. 15 1-го параграфа Даламбер уточняет понятие сходимости:

“15. Cette convergence des premiers termes peut même être poussée fort loin dans une serie qui d’ailleurs finira par être divergente, & qui par conséquent donnerà faux; par exemple, si on éleve $1+\dfrac{200}{199}$ à la puissance $\dfrac{1}{2}$, la serie ne commencera à diverger qu’après le terme dont le quantième n soit tel que $\left(1+\dfrac{1}{199}\right)\left(1-\dfrac{3}{2n}\right)$ soit > 1, c’est-à-dire tel que n soit > 300” [14, p. 175].

«15. Эта сходимость первых членов может сама быть продолжена очень далеко в ряде, который, тем не менее, в конце концов, стал бы расходящимся, и который, следовательно, приводил бы к ошибочному заключению; например, если возвести $1+\frac{200}{199}$ в степень $\frac{1}{2}$, ряд начнет расходиться после члена, чей номер n таков, что $\left(1+\frac{1}{199}\right)\left(1-\frac{3}{2n}\right)$ > 1, то есть, таков, что n > 300»

Таким образом, А.П. Юшкевич был прав (см. его цитату выше), считая, что согласно Даламберу, сходящийся или расходящийся ряд – это ряд, члены которого монотонно убывают или возрастают по величине (в этом месте мы вынуждены подправить А.П. Юшкевича – не по величине, а по абсолютной величине), начиная с некоторого места.

Прав был и Г.М. Фихтенгольц, утверждая (см. его цитату выше), что по терминологии Даламбера «… ряд мог до определенного места сходиться и лишь, потом начать расходиться, и наоборот». Мы должны так же согласиться с утверждением Г.М. Фихтенгольца (см. его цитату выше) о том, что «Даламбер предостерегает от пользования рядами, у которых отношение последующего члена к предыдущему окончательно становится абсолютно большим единицы и считает такие ряды «ошибочными». Для того чтобы ряд был «хорошим и неошибочным», он требует лишь, чтобы упомянутое отношение окончательно становилось (абсолютно) меньшим единицы»

Читаем у Даламбера п.8 1-го параграфа

“8. D’où il s’ensuit que la serie donnera faux, toutes les fois que μ, pris positivement ou négativement, sera > 1, puisque la serie sera alors divergente à son extrémité; & qu’au contraire, lorsque μ sera < 1, la serie pourra toujours être employée, puisqu’elle sera convergence à son extrémité, & que son dernier terme sera infiniment petit” [14, p. 173].

«8. Откуда следует, что ряд будет источником заблуждения, всякий раз, когда μ, взятое положительным или отрицательным, будет > 1, поскольку ряд на своём конце будет расходящимся; и наоборот, когда μ будет < 1, ряд всегда может быть использован, так как он будет сходиться на своём конце, и его последний член будет бесконечно малой величиной».

Дадим разъяснение к п.8. Как мы уже говорили выше, Даламбер в 1-м параграфе рассмотрел вопрос о сходимости и расходимости бесконечного биноминального ряда (2), получающегося при разложении степенной функции $(1+\mu)^m$ для нецелых значений m. В п.4 – п.7 1-го параграфа Даламбер показывает, что если $|\mu| > 1$ (в этом случае он говорит «когда μ, взятое положительным или отрицательным, будет > 1»), то члены биноминального ряда будут по модулю монотонно возрастать, начиная с некоторого члена, то есть биноминальный ряд будет расходящимся или по терминологии Даламбера «расходящимся на своём конце». В п.8 Даламбер говорит про такой ряд: “la serie donnera faux”. В переводе на английский эта фраза звучит следующим образом: “the series will give false”. На русский язык её можно перевести так: «ряд будет приводить к заблуждению» или «ряд будет источником заблуждения» или «ряд будет источником ошибки». Напротив, если $|\mu| < 1$, то по Даламберу биноминальным рядом можно пользоваться, поскольку «он будет сходиться на своём конце и его последний член (то есть n-й член в современной терминологии) будет бесконечно малой величиной». Опять, как мы видим, Даламбер не называет такой ряд хорошим. Конечно, Г.М. Фихтенгольц прав, когда говорит: «Условие Даламбера недостаточно для сходимости ряда в современном смысле: оно, например, выполняется для заведомо расходящегося гармонического ряда $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n}$ » [4, с. 23].

Уже того, что сказано, достаточно для понимания того, что Г.М. Фихтенгольц высказался достаточно деликатно на счёт представления Даламбера о сходимости ряда и его сумме и его терминологии. Поскольку Даламбер определил сходимость (расходимость) ряда как монотонное убывание (возрастание) его членов по модулю, то он вынужден различать сходимость (расходимость) «по первым членам» и «по последним членам». В пп. 17-18 1-го параграфа мемуара Даламбера читаем:

“17. . Il faut nécessairement, pour que la serie ne donne pas faux, que μ soit < 1.

18. Par la même raison, il est clair qu’une serie peut être divergente dans ses premiers termes, quoique convergente dans ses derniers, & par conséquent bonne & non fautive ...” [14, p. 176]

«17. … Чтобы ряд не был источником заблуждений, необходимо, чтобы μ было < 1.

18. По той же причине, очевидно, что ряд может быть расходящимся в своих первых членах, хотя быть при этом сходящимся в своих последних членах, &, следовательно, хорошим и не ошибочным …»

Итак, Даламбер, в конце концов, «договорился» до разделения рядов на “bonne & non fautive”, то есть на «хорошие и неошибочные» и, соответственно «нехорошие и ошибочные».

3. Заключение. Итак, подведём итоги. Даламбер не доказывал признак, названный его именем. В цитируемой работе Даламбера, которую часто объявляют как содержащую доказательство этого признака, признак Даламбера отсутствует. Из работы Даламбера следует, что он сумел доказать сходимость биноминального ряда в случае $|\mu| < 1$. Случай $\mu = \pm 1$ Даламбер не рассматривает. В случае $|\mu| > 1$ расходимость правильно обосновывается неограниченным возрастанием n-го члена ряда с ростом n до бесконечности. Замечания Фихтенгольца и Юшкевича по работе Даламбера правильны. Из них следует, что теория бесконечных рядов для Даламбера остаётся во многом непонятной. Сам Даламбер в конце мемуара об этом написал так:

“32. … Je laisse à d’autres Géometres le soin d’éclaircir ce mystere, ainfi que plusieurs autres qui peuvent se rencontrer dans la théorie des suites; théorie qui me paroît encore très-imparfaite, & quant à la partie analytique, & quant à la partie métaphysique. Pour moi, j'avoue que tous les raifonnemens & les calculs fondés sur des series qui ne sont pas convergentes, ou qu'on peut supposer ne pas l'être, me paraîtront toujours très-suspects, même quand les résuitats de ces raisonnemens s'accor- deroient avec des vérités connues d'ailleurs" [14, p. 182]

«Я оставляю другим геометрам заботу разъяснить эту тайну и несколько других, которые можно найти в теории рядов; теория до сих пор кажется мне очень несовершенной как в аналитической части, так и в метафизическом части. Для меня, я признаю, что все рассуждения и расчеты основаны на рядах, которые не сходятся, или, которые можно предполагать не быть такими, всегда кажутся мне очень подозрительным, даже если результаты такого рассуждения согласуются с истинами, известными где-то ещё».

ЛИТЕРАТУРА

1. Fabry E. Théorie des Séries a Termes Constants. Applications aux Calculs Numériques. – Paris: Hermann & Fils, 1910. – 198 p.

2. Воробьёв Н.Н. Теория рядов. 4-е изд. – М.: Наука, Гл. ред. физ. – мат. лит., 1979. – 408 с.

3. Ильин В. А., Позняк Э. Г. Основы математического анализа. В 2-х ч. Ч.1, 7-е изд. – М.: Физматлит, 2005. – 648 с.

4. Фихтенгольц Г.М. Основы математического анализа. Т.2. 7-е изд., стер. – СПб.: Лань, 2005. – 464 с.

5. Теляковский С.А. Курс лекций по математическому анализу. Семестр III, 2-е изд., дораб. – М.: МИАН, 2013. – 242 с.

6. Osgood W.F. Introduction to infinite series. – Cambridge: Harvard University Press, 1897. – 71 p.

7. Bonar D.D. Khoury M. Jr. Real infinite series. – Mathematical Association of America, 2006. – 232 p.

8. Knopp K. Theorie und anwendung der unendlichen reihen. – Berlin: Springer, 1922. – X+474 s.

9. Власова Е.А. Ряды. 3-е изд., испр. – М.: Изд. МГТУ, 2006. – 612 с.

10. Апарина Л.В. Числовые и функциональные ряды. 2-е изд., испр. – СПб.: Лань, 2012. – 160 с.

11. Bromwich T.J.I. An Introduction to the Theory of Infinite Series. – London: Macmillan and Co., Ltd, 1908. – XIV+511 p.

12. Hyslop J. M. Infinite series. 5-th ed. - N.Y.: Interscience Publishes Inc., 1959. – 232 p.

13. Cauchy A. L. Cours d'analyse de l'École royale polytechnique. I.re partie Analyse algébrique. – Paris: Impr. royale Debure frères, 1821. – 576 p.

14. d'Alembert J. §1. Réflexions sur les Suites divergentes ou convergentes, XXXVme Mémoire, Réflexions sur les Suites & sur les Racines imaginaires, Opuscules mathematiques, ou mémoires sur différens Sujets de Géométrie, de Méchanique, d'Optique, d'Astronomie, &c. Tome V, Divisé en deux parties. Premiere Partie. Paris, Chez Briasson, 1768. – XX+525 p., pp. 171 – 183.

15. История математики. Т.3. Математика XVIII столетия. Под. ред. А.П. Юшкевича. – М.: Наука, 1972. – 497 с.

REFERENCES

1. Fabry E. Théorie des Séries a Termes Constants. Applications aux Calculs Numériques. – Paris: Hermann & Fils, 1910. – 198 p.

2. Vorobev N.N. Teoriya ryadov. 4-e izd. – M.: Nauka, Gl. red. fiz. – mat. lit., 1979. – 408 c.

3. Ilin V. A., Poznyak E. G. Osnovy matematicheskogo analiza. V 2-kh ch. Ch.1, 7-e izd. – M.: Fizmatlit, 2005. – 648 s.

4. Fikhtengolts G.M. Osnovy matematicheskogo analiza. T.2. 7-e izd., ster. – SPb.: Lan, 2005. – 464 s.

5. Telyakovskiy S.A. Kurs lektsiy po matematicheskomu analizu. Semestr III, 2-e izd., dorab. – M.: MIAN, 2013. – 242 s.

6. Osgood W.F. Introduction to infinite series. – Cambridge: Harvard University Press, 1897. – 71 p.

7. Bonar D.D. Khoury M. Jr. Real infinite series. – Mathematical Association of America, 2006. – 232 p.

8. Knopp K. Theorie und anwendung der unendlichen reihen. – Berlin: Springer, 1922. – X+474 s.

9. Vlasova E.A. Ryady. 3-e izd., ispr. – M.: Izd. MGTU, 2006. – 612 s.

10. Aparina L.V. Chislovye i funktsionalnye ryady. 2-e izd., ispr. – SPb.: Lan, 2012. – 160 c.

11. Bromwich T.J.I. An Introduction to the Theory of Infinite Series. – London: Macmillan and Co., Ltd, 1908. – XIV+511 p.

12. Hyslop J. M. Infinite series. 5-th ed. - N.Y.: Interscience Publishes Inc., 1959. – 232 p.

13. Cauchy A. L. Cours d'analyse de l'École royale polytechnique. I.re partie Analyse algébrique. – Paris: Impr. royale Debure frères, 1821. – 576 p.

14. d'Alembert J. §1. Réflexions sur les Suites divergentes ou convergentes, XXXVme Mémoire, Réflexions sur les Suites & sur les Racines imaginaires, Opuscules mathematiques, ou mémoires sur différens Sujets de Géométrie, de Méchanique, d'Optique, d'Astronomie, &c. Tome V, Divisé en deux parties. Premiere Partie. Paris, Chez Briasson, 1768. – XX+525 p., pp. 171 – 183.

15. Istoriya matematiki. T.3. Matematika XVIII stoletiya. Pod. red. A.P. Yushkevicha. – M.: Nauka, 1972. – 497 s.

ON THE HISTORY OF D'ALEMBERT'S TEST CONVERGENCE OF AN INFINITE POSITIVE SERIES

I.V. TERESHCHENKO

Kuban State Technological University,
2, Moskovskaya st., Krasnodar, Russian Federation, 350072;
e-mail: tereshchenko57@rambler.ru

The history of origination of the well-known and often used d'Alembert's test for convergence of a positive infinite series, known as a ratio test, is considered. On the basis of the source it was shown that d'Alembert has nothing to do with it. In the cited work of d'Alembert, which is often announced as having the evidence of the test, d'Alembert's test is not available. It follows from d'Alembert's work that he associated the convergence and divergence of the series with the monotonicity of modules of the terms the series. D'Alembert was able to properly investigate the convergence and divergence of the binomial series. He properly justifies the divergence of the binomial series by unlimited increase of the *n*-th term as *n* increasing to infinity. It confirmed the correctness of evaluations of the d'Alembert'work by Fikhtengol'ts and Yushkevich. The question of authorship is d'Alembert's test can be considered open.

Key words: infinite series, a positive infinite series, d'Alembert's test, a ratio test, a ratio test of Cauchy.